EL CONCEPTO DE MODELO

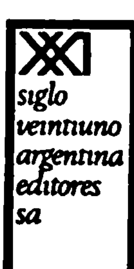
bases para una epistemología materialista de las matemáticas

por

ALAIN BADIOU

traducción de

HUGO ACEVEDO





siglo veintiuno editores, sa
GABRIEL MANCERA 65, MEXICO 12, D.F.

siglo veintiuno de españa editores, sa
EMILIO RUBIN 7, MADRID-16, ESPAÑA

siglo veintiuno argentina editores, sa
TACUARI 1271, BUENOS AIRES, ARGENTINA

Primera edición en español, 1972

Título de los originales:
Le Concept de Modèle

"Marque et Manque: à propos du zèro"
Cahiers pour l'Analyse, 10
"La subversion inifinitésimale"
Cahiers pour l'Analyse, 9

Impreso en Argentina
Printed in Argentina

INDICE

NOTICIA

El comienzo del presente texto (de 1 a 5 inclusive) retoma la exposición que formuló Alain Badiou el 29 de abril de 1968 dentro del marco del Curso de Filosofía para Científicos impartido en la École Normale Supérieure.

La continuación (de 6 a 10) debería haber sido objeto de una segunda exposición, esta vez el 13 de mayo del mismo año. Pero aquel día, como se recordará, las masas populares movilizadas contra la dictadura burguesa del gaullismo daban en todo el país testimonio de su determinación y ponían sobre el tapete el proceso que había de conducir a un formidable enfrentamiento de clases, al trastorno de la coyuntura política y a la provocación de efectos cuya continuidad, seguramente, no habrá de hacerse esperar.

Es comprensible que en medio de aquella tempestad la intervención en el frente filosófico hubo de pasar a segundo plano.

Aún hoy los acentos medianamente "teoricistas" de este texto remiten a una coyuntura ya superada. La lucha, así sea la ideológica, exige un estilo de trabajo completamente distinto y una combatividad política justa y lúcida. Ya no es cuestión de apuntar a un blanco y errarle.

En el presente texto podrá verse, además de un documento y un jalón, una espera felizmente interrumpida.

Pero acaso algo más. Conservando, por supuesto, el sentido de las proporciones respecto de la significación

histórica de la crisis y respecto, más aun, de la calidad de los actores, recordaremos que Lenin asignó por un momento, el día siguiente al del fracaso de 1905, una importancia excepcional a la lucha filosófica contra los empiriocriticistas. Ocurre que los aparentes descalabros de la práctica política, los diagnósticos erróneos de "reflujo" y el descorazonamiento pequeñoburgués siempre alimentan a una raza de liquidadores, de idealistas y revisionistas que, por no haber podido cambiar el mundo de un día para el otro, por no haber podido cambiar, incluso, "la vida", se consuelan emprendiendo mansamente la tarea de "cambiar" el marxismo-leninismo [1].

No abrigamos la menor ilusión. El terreno en que se sitúa este trabajo (la doctrina de la ciencia), además de ser limitadísimo y muy indirecto, puede resultar peligroso si nos equivocamos con respecto al sentido de su limitación. No obstante, consideramos útil recordar por qué lado, dentro de este campo, a nuestro parecer y desde nuestro punto de vista, puede proseguirse o consolidarse el envite del "Materialismo Dialéctico".

Diciembre de 1968.

[1] Véase: Louis Althusser, *Lénine et la philosophie*, Maspero, pp. 7-10.

1. Algunos preliminares relativos a la ideología

Damos por sabida la descripción[1] de una formación ideológica particular que distribuye el discurso de la ciencia conforme a una diferencia presupuesta, cual es la diferencia entre la realidad empírica y la forma teórica.

Recordamos que tal diferencia gobierna una imagen de la ciencia, definida, en líneas generales, como representación formal de su objeto dado. Dentro de esta configuración, el elemento considerado dominante puede ser la presencia efectiva del objeto, en cuyo caso conviene designar ésta como empirismo; pero la dominancia puede igualmente corresponder a la anterioridad de los dispositivos formales, al código matemático en que se representa al objeto presente. Entonces designamos la configuración como un formalismo.

Está claro que empirismo y formalismo no tienen por ahora otra función que la de ser los términos de la pareja que forman. Lo que constituye a la epistemología burguesa no es el empirismo ni el formalismo, sino el conjunto de las nociones con que designamos, en un primer tiempo, su diferencia y en un segundo tiempo su correlación.

Exactamente de esta manera plantea el problema de la unidad de la ciencia el positivismo lógico, epistemología dominante en los países anglosajones hace ya más de veinte años.

[1] Véase: Louis Althusser, *Cours de philosophie pour scieintifiques*, fascículo I, Maspero, París.

En un artículo canónico que lleva por título "Los fundamentos lógicos de la unidad de la ciencia" y que data de 1938, Rudolf Carnap procede como sigue:

a) Formula explícitamente la diferencia constitutiva de que hemos partido: "La primera distinción que tenemos que hacer –escribe– es la distinción entre *ciencia formal y ciencia empírica"*;

b) Intenta encontrar reglas de reducción que puedan permitir convertir los términos de una ciencia empírica en los de otra ciencia. De este modo muestra que los términos de la biología son convertibles en términos de la física: la física es una "base de reducción" suficiente para la biología. El uso de los operadores de reducción le permite a Carnap afirmar la unidad del *lenguaje* de la ciencia, en el sentido de que un lenguaje "fisicalista" es una base de reducción universal para las ciencias empíricas;

c) Plantea el problema de la relación entre ese lenguaje único y los lenguajes artificiales del primer grupo de ciencias, esto es, las ciencias formales. Todo el análisis semántico de Carnap remata en este punto, en el que se cierra, justamente, el procedimiento que abría la distinción de los dos tipos de ciencia.

Nociones como la de ciencias empíricas, de reductibilidad, de análisis del sentido, etc., así como su elaboración refinada, articulan las fases de la posición y la deposición de la diferencia inicial.

Es una articulación elaborada, especial. No es, en su existencia discursiva, inmediatamente reducible a la generalidad de la ideología de lo dado. Por lo demás, Carnap la opone de manera explícita a otras *variantes*, como por ejemplo a la del lógico Quine, quien, por su parte, borra *sin reparo alguno* la distinción entre verdad fáctica y verdad lógica. Para Quine, en efecto, admitir variables de un cálculo lógico es hacer justicia a las constantes que son valores de tales variables. Ahora bien, las constantes se fijan únicamente por lo mismo que tienen el poder de denotar objetos concretos. Y de modo recíproco, lo que existe "empíricamente" no es otra cosa que lo que es asignable por una constante. Por último, como escribe Quine, "ser es ser el valor de una variable": lo empírico

es una dimensión de lo formal, o a la inversa.

Sólo que la oposición entre Carnap y Quine es *interna* de la misma problemática. Efectivamente, Quine define la particularidad de su intento (la originalidad de su propósito) por la *negación* justificada de una diferencia a la que Carnap, por su parte, intenta *reducir*. Si el discurso de Carnap tiene por esencia la reducción, en cambio lo único importante del discurso de Quine es la justificación de que no hay que reducir aquello que es conveniente negar. La diferencia en cuestión, entre el "hecho" y las formas lógicas, es el motor común a ambos discursos.

Con mayor exactitud, la inestabilidad de la diferencia y su permanente renacimiento-negado representan la compulsión del señuelo sobre discursos ideológicos y consecuentemente desprovistos de todo acceso a su propia causa. Estas características se hallan en el principio de una *agitación* discursiva que desplaza al infinito el lugar esencialmente vacío en que debería destacarse la impracticable Ciencia de la Ciencia.

Debemos comprender que lo que separa a dos discursos ideológicos no es de la misma índole de lo que separa, por ejemplo, a la ciencia respecto de la ideología (corte epistemológico) o a una ciencia de otra, pues la regla de tal separación es también, precisamente, la forma última de *la unidad* de ambos discursos.

Hagamos una comparación con las *variaciones* musicales sobre un tema. Son, sí, diferentes, pero su diferencia las relaciona entre sí como variaciones del *mismo tema*. El sistema (infinito) de las diferencias entre variaciones es el efecto de la diferencia (única) entre el tema y lo que, sin ser tema, se relaciona con éste, no obstante, o sea, el campo de las variaciones posibles, el espacio variacional. Sólo es variación lo que llega a éste, al que ninguna variación justifica, puesto que es el lugar en el que las diferencias, al anularse en la unidad, se comprueban. El señuelo ideológico consiste en el hecho de atribuir a las variaciones mismas el poder causal respecto de la unidad sistemática de sus diferencias, confundiendo de tal modo el *recorrido* del sistema con la ley de su *producción*, ya que a ésta sólo es dable vincularla a la falta *del tema*.

Ya se ha mostrado[2] que hablar de *la* ciencia es un síntoma ideológico. A decir verdad, también lo es hablar de la ideología en singular. Ciencia e Ideología son plurales. Pero su tipo de multiplicidad es diferente: las ciencias forman un sistema discreto de diferencias articuladas; las ideologías, una combinación continua de variaciones. Tomemos este aserto por tesis. Y propongamos la siguiente *definición:* dada una formación ideológica, caracterizada por un par de términos, llámase *variante* todo sistema vinculado de nociones que permite posponer el problema de la unidad de los términos del par y, eventualmente, responder a él.

Y digo posponer porque la unidad del par es siempre la condición de existencia del discurso ideológico considerado, de manera, pues, que el problema de la unidad es una pura y simple repetición. Sobre poco más o menos, Marx dice que el hombre sólo se plantea problemas que puede resolver. Pues bien, nosotros tenemos que decir que sólo nos planteamos problemas cuya respuesta es la condición ya dada del problema en sí. Sin embargo, la regla de esa repetición es la de ser inadvertida por quien la opera. Y esta invisibilidad se desarrolla justamente en el artificio de las variantes. Para retomar la metáfora de la música, digamos que los discursos son variaciones sobre un tema *no dado* (que no figura entre las variaciones, ni a la cabeza, ni en parte alguna), de modo que cada variación sólo puede ser, para sí, imagen –imagen tomada por su presencia– del tema en persona. De ahí que toda variante dogmatice sobre su propia preeminencia.

En el caso de esas seudociencias que son las supuestas "ciencias humanas", la proliferación de las metodologías refleja lo infinito del principio variacional, así como su desconocimiento.

2 Louis Althusser, *ob. cit.*, "Introduction", y Pierre Macherey, *ídem*, fascículo II, "Expérience et Expérimentation", ed. cit.

2. Tesis que trataremos posteriormente de justificar

Llámase *nociones* a las unidades del discurso ideológico; *conceptos*, a las del discurso científico; y *categorías*, a las del discurso filosófico.

Como la filosofía es, en lo esencial, cobertura ideológica de la ciencia, una categoría denota objetos "inexistentes" en los que se combinan el trabajo del concepto y la repetición nocional. Por ejemplo, la categoría platónica del "número ideal" designa, dentro de un ajuste "inexistente", conceptos de la aritmética teórica y de las nociones jerarquizantes de origen político-moral; las categorías kantianas del tiempo y el espacio se relacionan con nociones relativas a las facultades humanas de los conceptos de la física de Newton; la categoría sartreana de la historia combina conceptos marxistas y nociones metafísico-morales, como la de la temporalidad o la de la libertad, etcétera.

Dicho lo cual, pasamos a formular las tesis siguientes:

Tesis 1: Existen dos instancias epistemológicas de la palabra "modelo". Una es una noción descriptiva de la actividad científica; otra, un concepto de la lógica matemática.

Tesis 2: Cuando la segunda instancia sirve de sostén a la primera, tenemos una cobertura ideológica de la ciencia, vale decir, una categoría filosófica: la categoría de modelo.

Tesis 3: La tarea actual de la filosofía consiste en desentrañar, dentro de los usos de la categoría de modelo, un uso *supeditado*, que no es más que una variante, y un uso positivo, investido en la teoría de la historia de las ciencias.

3. Ciertos usos de modelos que no se ven controvertidos

La primera parte de la Tesis 1 se ilustra a la perfección en un texto metodológico de Lévi-Strauss, muy conocido, que figura al final de su libro *Antropología estructural*. La pareja empirismo/formalismo reviste allí la forma de la oposición entre la neutralidad de la observación de los hechos y la producción activa de un modelo. En otras palabras, la ciencia es pensada como la persona de enfrente de un objeto real, acerca del cual hay que investigar (etnografía), y de un objeto artificial destinado a reproducir, a imitar en la ley de sus efectos, el objeto real (etnología).

En su condición de objeto artificial (Lévi-Strauss dice, precisamente, "construido"), el modelo es controlable. Es dable "prever de qué manera reaccionará el modelo en caso de modificación de alguno de sus elementos". Esta previsión, en la que estriba la *transparencia* teórica del modelo, se encuentra evidentemente vinculada al hecho de estar el modelo íntegramente montado (Lévi-Strauss dirá, gustosamente *"bricolé"**), de suerte que la opacidad atribuible a lo real está ausente de él. Desde este punto de

* A raíz de este término, don Francisco González Aramburo, traductor al español de *La Pensée sauvage (El pensamiento salvaje*, Fondo de Cultura Económica, México, 1964, p. 35), anota: "Los términos *bricoler, bricolage* y *bricoleur*, en la acepción que les da el autor, no tienen traducción al castellano. El *brocoleur* es el que obra sin plan previo y con medios y procedimientos apartados de los usos tecnológicos y normales. No opera con *materias primas* sino ya elaboradas, con fragmentos de obras, con sobras y trozos, como el autor explica". Permítaseme añadir que, en efecto, *bricoler* es jugar de rebote, o andar con rodeos, u ocuparse en varias tareas al mismo tiempo, y que *bricolage* puede traducirse por chapuza, así como *bricoleur* (o *bricolier*) por la persona aficionada a todo y no especializada en nada. *(N. del T.)*

vista, el modelo no es una transformación práctica de lo real, de *su* real; pertenece al registro de la invención pura y está dotado de una "irrealidad" formal.

Así caracterizados, los modelos abarcan una amplia clase de objetos[1]. Para comodidad de la exposición, dividiré ésta en dos grupos: modelos "abstractos" y montajes materiales.

El primer grupo contiene lo que podemos llamar objetos escripturales, es decir, los modelos propiamente teóricos o matemáticos. Se trata, en rigor, de un *haz de hipótesis* al que suponemos relativamente completo en el campo estudiado y cuya coherencia y cuyo posterior desarrollo deductivo quedan garantizados por una codificación generalmente matemática.

Un terreno de elección de estos modelos es la Cosmología. En su libro *Cosmologías del siglo XX*, Jacques Merleau-Ponty estudia de manera sistemática, aun cuando sin superar la simple crónica de la ciencia, los *modelos de universo:* cabalmente, como el Todo nunca es susceptible de una inscripción experimental, la cosmología se vincula al idealismo del modelo. Estas construcciones deductivas han nacido de una convergencia: por una parte teníamos los desarrollos teóricos de la Relatividad; por la otra, la experimentación astronómica, que culminó en el descubrimiento de la desnivelación [*décalage*] hacia el rojo del espectro de las nebulosas. El modelo es un cuerpo de enunciados gracias al cual esa convergencia histórica se ha visto integrada en un discurso único. Naturalmente, trátase de integraciones diversas, ninguna de las cuales tiene fuerza de ley. Y es que los modelos no son construcciones intracientíficas. Así como el niño logra superar, en la engañifa del espejo, el horror de su cuerpo fragmentado, así también los modelos reflejan, conforme al ideal prematuro del texto unificante, el desorden instantáneo de la producción de conocimientos. El modelo pertenece a la metateoría tranquilizante de una coyuntura.

1 Para ejemplos, ver: M. Serres y A. Badiou, "Modèle et Structure", texto de una emisión de la televisión escolar (sobre todo la quinta parte), en *Emissions de philosophie pour l'année scolaire 1967-8*, publicación del Institut Pédagogique National.

En el segundo grupo encontramos montajes materiales, cuyo destino es triple:

1) Presentar en el espacio, de una manera sintética, procesos no espaciales: grafos, diagramas, etc.

Por ejemplo, las informaciones proporcionadas por la contabilidad nacional permiten construir un grafo animado por cinco vértices: administraciones, ahorros, bienes y servicios, empresas y mercado financiero. Los flujos móviles entre los vértices configuran la estructura de los intercambios, pues la teoría de los grafos permite refinar con respecto a la velocidad y la dimensión de los flujos.

Es la ocasión de señalar que la economía política burguesa se realiza, de manera general, en la construcción de modelos de expansión equilibrada; también en este punto el modelo adorna el "desorden" capitalista, no por el conocimiento de su causa (o sea, la ciencia marxista de las formaciones sociales y la inteligencia de la lucha de clases), sino por la *imagen técnica* integrada de los intereses clasistas de la burguesía. La "expansión", presentada como norma progresista, es en realidad el efecto inevitable de las estructuras en que se engendra, con la baja asintótica de su tasa, la ganancia. El "equilibrio" es la regla de seguridad contra la exacerbación de las contradicciones, así como el riesgo político de un ascenso hasta los extremos de la lucha de clases. Los modelos de expansión en el equilibrio, so capa de pensar su objeto (la economía de las presuntas "sociedades industriales"), *objetivan objetivos clasistas.* Una economía nacional en expansión equilibrada configura la *motivación* satisfecha de las intervenciones estatales en nombre del "interés general". El modelo, imagen portátil, unifica exteriormente una política económica, la legitima y oculta su causa tanto como su regla.

Es de primerísima importancia mostrar cómo el yugo econométrico y el uso creciente de los presuntos "modelos matemáticos" en economía representan una de las formas más claras del revisionismo, esto es, la desviación del marxismo en el centro mismo de su parte mejor constituida y la inevitable alineación entre los objetivos de la burguesía.

2) Siempre dentro del segundo grupo, otros modelos tienden a realizar estructuras formales, vale decir, a transferir la materialidad escriptural a otra "región" de inscripción experimental. *Mathematical models*, el clásico libro de Cundy y Rollet, expone, por ejemplo, de qué modo construir efectivamente –cartón o madera– los cinco poliedros regulares convexos y cómo fabricar una máquina para trazar la lemniscata de Bernuilli; pero también, igualmente, de qué manera presentar un conectador lógico con la forma de un circuito eléctrico simple.

3) Por fin, una última clase de modelos apunta a imitar comportamientos: es el vasto campo de los autómatas.

Por supuesto, para el epistemólogo no puede en modo alguno tratarse de negar la existencia de tales dispositivos, ni aun, como en cosmología, la de su importancia "reguladora" dentro de la historia de una ciencia, o, como ocurre en automática o en economía, su importancia técnico-política.

Nos limitaremos a comprobar que el modelo –momento técnico o figura ideal– ocupa su lugar, a lo sumo, en los aledaños de la práctica científica. Observemos que, como adjutor transitorio, sólo está destinado a su propio desmantelamiento y que el proceso científico, lejos de fijarlo, lo desconstruye. Bachelard[2] muestra a las claras cómo el modelo "planetario" de Bohr sólo hizo entrega de una imagen útil del átomo en la época en que la microfísica acompañaba la borradura de las órbitas, la perturbación de su trazado y, finalmente, la renuncia a la imagen de sí misma en beneficio de un modelo estadístico. Quien no sabía renunciar al modelo renunciaba al saber: toda detención en el modelo forma un obstáculo epistemológico. Hasta qué punto, pues, el modelo permanece al margen de la producción de conocimientos. Con todo, en ese lugar no es recusable. No presenta siquiera un problema.

[2] Gaston Bachelard, *L'activité de la physique rationaliste*, cap. II especialmente en su parte séptima.

4. Un empleo puramente ideológico de la palabra "modelo"

El problema epistemológico surge, en cambio, de todo enunciado que se aplica a describir la diferencia, así como la relación, entre el modelo y lo real empírico; surge de todo intento de anudar las maneras de pensar de lo que en el modelo dice ser objeto suyo, y de toda posición marginada del modelo de la cual es modelo.

Hay conflicto epistemológico si se pretende hacer de la invención de modelos la actividad misma de la ciencia; por lo tanto, si el *conocimiento* científico es presentado como conocimiento por modelos.

Tal es, justamente, la opinión de Lévi-Strauss en el texto que he citado y que merece, luego, ser nuevamente discutido.

Observemos antes que nada que a este respecto las expresiones empleadas por Lévi-Strauss son en extremo vagas. Nos dice que los modelos se construyen "según" la realidad empírica. Y por lo demás "el modelo debe ser construido de manera tal que su funcionamiento pueda informar acerca de todos los hechos observados". El giro "informar acerca de" (más adelante encontraremos "describir" y "explicar") soporta a solas la carga epistemológica.

Ahora bien, los "hechos observados" de los que el modelo da razón se hallan en un estado de dispersión neutralizada: son dados como tales, fuera de toda intervención teórica, ya que ésta comienza precisamente con la construcción del modelo, con el *artificio* del montaje. Lévi-Strauss transfiere en suma al discurso epistemológico la oposición institucional entre el etnógrafo "en el terreno mismo" –recolector atento de las costumbres– y el etnólogo ciudadano, ordenador provisto de su ejército de fichas: transfiere, incluso, la oposición especulativa entre la Naturaleza (la opacidad permanente de lo que adviene) y

la Cultura (*bricolage* de las diferencias enumerables). De esta manera confronta, dentro de la tradición positivista, una información pasiva con una actividad cuyo sentido consiste en reproducir la regla donde se concentra la información.

¿Pero cómo *controlar* la reproducción? ¿Cuál es el criterio del "buen" modelo?

Dentro de una concepción experimentalista de la ciencia, como la de Bachelard[1] para la física o la de Canguilhem[2] para la fisiología, el "hecho" experimental es igualmente un artefacto: es un acompañamiento material de la prueba y jamás existe antes que ésta. Balibar[3] ha mostrado que en tales condiciones la dialéctica de la ciencia es íntegramente interna de un proceso de *producción* de los conocimientos y que éste se encuentra doblemente articulado: 1º) según el *sistema* de los conceptos, y 2º) según la *inscripción* de la prueba.

No cabe duda de que esta concepción da origen a múltiples problemas teóricos. Hay que preguntarse, por ejemplo, cuáles son las estructuras de eficacia de la doble articulación; cuál es, en última instancia, el *motor* de la ciencia (en el mismo sentido en que la lucha de clases es el motor de la historia). Estos asuntos incumben, no obstante, a una teoría de la causalidad estructural[4] y no a una filosofía del conocimiento. La ciencia se ve interrogada como efecto práctico y no como representación.

En cambio, en el caso de la epistemología de los modelos, la ciencia se divide por una parte en intervención productora (invención y montaje de los modelos) y

[1] Gaston Bachelard, *Le nouvel esprit scientifique*, introducción y capítulo 6.

[2] Georges Canguilhem, "L'expérimentation en biologie animale", en *La connaissance de la vie.*

[3] Etienne Balibar, *Cours de philosophie pour scientifiques*, fascículo 2.

[4] Para la exposición de estos problemas, véase: J. A. Miller, "L'action de la structure", en *Cahiers pour l'Analyse*, Nº 9, segundo trimestre de 1968. Artículo incluido en el volumen *Ciencias sociales: ideología y conocimiento*, Editorial Siglo XXI Argentina 1971.

por la otra en comprobación empírica o averiguación. El problema del sentido y el valor de la intervención pasa a ser, de ahí, inevitable dentro de la lógica misma de un dispositivo como ése.

Formularlo es ante todo tomar nota de la multiplicidad de los modelos. *Lo empírico no indica por sí mismo* modelo alguno, puesto que es inactivo: dentro de la libertad inventiva del artificio, todas las tentativas son posibles. Efectivamente, el modelo no administra la menor prueba. No se halla *apremiado* por un proceso demostrativo, sino tan sólo *confrontado* con lo real. Es concebible que bajo este régimen, y más en una época de búsqueda incierta, los modelos "hormigueen", como dice Serres[5].

Luego, si el modelo representa la verdad del trabajo científico, entonces la verdad del trabajo científico nunca es otra cosa que la del mejor modelo. De este modo queda restaurada la dominación del empirismo: la actividad teórica no puede elegir entre modelos necesariamente múltiples, precisamente porque es la actividad fabricante de modelos. Quien zanja la cuestión es, por tanto, el "hecho", al designar al mejor modelo, esto es, la mejor aproximación a él mismo. "El mejor modelo será siempre –escribe Lévi-Strauss– el modelo verdadero, es decir, aquel que, sin dejar de ser el más sencillo, responda a la doble condición de no utilizar otros hechos que los considerados y de informar acerca de todos."

El círculo es evidente. A la *pregunta* de *qué es un* modelo, se responde: es el objeto artificial que rinde cuenta de todos los hechos empíricos considerados. Pero a la pregunta: ¿Con qué criterio se "rinde cuenta", y cuál es el verdadero modelo?, nuevamente se responde: el verdadero modelo es aquel que rinde cuenta de todos los hechos. Y para medir sobradamente se añadirá la clásica, elegante condición: el modelo debe ser el más sencillo.

En estos criterios de exhaustividad y sencillez es dable reconocer las normas de la razón clasificadora de la edad clásica, así como las categorías fundamentales de una filosofía de la representación. Son, incluso, los criterios de la crítica pictórica en el siglo XVIII, y no hay de qué

[5] M. Serres y A. Badiou, "Modèle et Structure" en *ob. cit.*

asombrarse. Para la epistemología de los modelos, la ciencia no es proceso de transformación práctica de lo real, sino la fabricación de una imagen plausible.

Así pues, de todos los tipos de modelos que hemos mencionado, los más evidentemente imitativos –el autómata y el simulador económico– tienen en esta doctrina una función ejemplar. Hay en el texto de Lévi-Strauss una referencia constante, y es la del clásico libro de von Neumann y Morgenstern *La teoría de los juegos y el comportamiento económico.* El aporte propiamente científico de este libro es, desde luego, considerable. Sin embargo, no es exactamente a él a quien recurre Lévi-Strauss, sino, con el pretexto de él, a la destacable filosofía que le sirve de séquito. Lévi-Strauss cita textos en los que se invoca de manera explícita una relación tan endeble como la del parecido; por ejemplo: "Los modelos deben parecerse a la realidad en todos los aspectos que interesan a la investigación perseguida". O bien: "El parecido con la realidad es un requisito para que el funcionamiento del modelo sea significativo".

Bien se ve cuánto se recurre a la analogía exterior, a la simulación, para reducir el desfasaje inicial entre la opacidad inerte de los hechos y la actividad del constructor de modelos.

En el límite, la reducción se consuma si es dable construir un modelo de la actividad del constructor de modelos. Es el mito regulador de esta epistemología. Aclara los textos extraños en los que Lévi-Strauss confiere a la complejidad cerebral la dignidad de estructura de las estructuras, de último soporte de la "estructuralidad" en sí. Frente a este objeto último se emprenderá la construcción de un modelo del funcionamiento cerebral, un "cerebro artificial", como ambicionan los cibernéticos, cuya ideología de los modelos es, hace ya mucho, la filosofía espontánea.

Si la ciencia es un artesanado imitativo, entonces la imitación artesanal de este artesanado es, en efecto, el Saber Absoluto.

Resumamos.

1) Con esta primera forma, todavía grosera, la palabra

"modelo" es el operador de una *variante* del empirismo vulgar. En él, la dualidad del "hecho" y la ley queda reproducida por la de la realidad y el modelo. El problema de la unidad de tal dualidad adquiere la forma de la reproducción, de la simulación funcional. La idea del saber total se vincula, por fin, al proyecto cibernético de una imitación de los procesos cerebrales.

2) Esa variante tiene por *objetivo* inadvertido, pero en el que se destaca la significación política de un discurso:

a) borrar la realidad de la ciencia como proceso de producción de los conocimientos, un proceso que en *ninguna* parte confronta la preexistencia de una realidad con operaciones ideales, sino que desarrolla, *dentro* de una materialidad histórica específica, demostraciones y pruebas;

b) esfumar la distinción entre producción de los conocimientos y *regulación* técnica de un proceso concreto. De modo especial en los "modelos" económicos, la supeditación técnica a las condiciones de la producción pasa por la necesidad *intemporal de un "tipo" de economía*, cuyo modelo ejemplifica las compulsiones benéficas.

5. El concepto científico de modelo y la doctrina neopositivista de la ciencia

Encaremos ahora la segunda parte de nuestra Tesis 1. La palabra "modelo" figura en contextos indiscutiblemente científicos, en los que no pretende designar el resorte de la práctica teórica, sino un elemento asignable dentro de una coherencia demostrativa: ni noción ni categoría, sino concepto.

Es una verdadera rama, sin duda la más viva, de la lógica matemática y se llama teoría de los modelos. Inscríbense en ella, al término de procesos compulsivos, enunciados teóricos carentes de toda ambigüedad, como por ejemplo:

a) Una teoría es coherente si y solamente si tiene un modelo (teorema de completitud de Gödel/Henkin);
b) Una teoría formal que admite un modelo infinito necesariamente admite un modelo enumerable (teorema de Löwenheim-Skolem);
c) Si la teoría de los conjuntos sin el axioma de elección y sin la hipótesis del continuo admite un modelo, también admite uno la teoría obtenida por adjunción de estos dos enunciados (teorema de Gödel); y *la teoría obtenida por adjunción de su* negación admite igualmente uno (teorema de Cohen).

¿Qué ocurre con la palabra "modelo" en tales enunciados y en las demostraciones, a menudo sumamente complejas, que los sostienen? ¿Hay una relación, sea la que fuere, entre la acepción que tiene en estos casos y, digamos, la que tiene en los mencionados textos de Lévi-Strauss y von Neumann?

Una primera inspección del problema parece que debe imponer una respuesta afirmativa a la segunda pregunta. Si el positivismo lógico ha podido proponer una doctrina de la ciencia permanentemente apuntalada por la lógica matemática, ello se debe, entre otras cosas, al hecho de que el concepto de modelo le permite pensar la relación entre un sistema formal y su exterior "natural". Por lo demás, es bien sabido que la filosofía neopositivista ha desempeñado un papel de primer plano en la genealogía de la lógica matemática. Históricamente, hay una complicidad dialéctica entre el neopositivismo lógico y la teoría de los modelos.

La clásica distinción entre dos aspectos de la lógica parece redoblar, dentro del discurso científico, la pareja inaugural compuesta por la ciencia formal y la ciencia empírica.

1) Un sistema formal, o sistema logístico, no es más que un juego con las escrituras, cuyas reglas son explícitas y preven todos los casos sin ambigüedad. A partir de un conjunto inicial de enunciados (los axiomas) se derivan teoremas de acuerdo con reglas de deducción. El *sentido* del juego está vinculado a características internas; por

ejemplo, el juego no tendría sentido alguno (ningún interés) si *todos* los enunciados fuesen teoremas. No habría entonces, por así decir, necesidad de jugar; como toda inscripción sería lícita, las reglas de deducción no servirían de nada. Pídase, pues, que exista por lo menos un enunciado que no sea derivable a partir de los axiomas por aplicación de las reglas. Es la propiedad fundamental de *consistencia* del sistema (véase el Apéndice). Esa es una exigencia formal, de la que diremos que expresa una norma *sintáctica*. El conjunto de las reglas del sistema, o sea, la manera de *formar* las escrituras (gramática pura) y la manera de *deducirlas* (grámatica de los encadenamientos), define, en efecto, una sintaxis. El positivismo lógico identifica gustosamente la dimensión formal de la ciencia con la sintaxis de su lenguaje.

2) Por otro lado es bien sabido que la construcción de un sistema formal no es, justamente, un juego gratuito. Se apunta, de modo esencial, a delinear la estructura deductiva estricta —el aspecto mecanizable— de un campo científico existente, es decir, de una práctica teórica cuyos efectos se inscriben en la historia. Para verificar que un sistema formal expresa esa estructura, deben ponerse en correspondencia los enunciados del sistema formal con aquellos en los que se organiza el campo de objetos científicos considerado. Naturalmente, no es cosa de contentarse con analogías, con semejanzas, etc. Deben definirse reglas de correspondencia. Todo lo que concierne a éstas tiene que ver con la *semántica* del sistema, con su *interpretación*.

Esta vez el problema del sentido se plantea de otra manera: hablar del sentido del sistema es hablar de sus diversas interpretaciones. La exigencia fundamental será la de que, una vez construida la regla de correspondencia semántica, a todo enunciado *derivable* (a todo teorema) se vincule un enunciado *cierto* en el campo de la interpretación. La "verdad" en tal caso no es más que el reparto en dos clases de los enunciados científicos, reparto que resulta del *trabajo* de los conceptos: enunciados ciertos (demostrados o probados, o cualquier otra forma científicamente asignable de evaluación) y enunciados falsos. La

semántica tiende a establecer que es posible organizar retrospectivamente ese reparto gracias a los procedimientos puramente mecánicos e íntegramente controlables puestos en juego en un sistema formal.

Si es dable, en efecto, asignar a todo enunciado derivable un enunciado "cierto", se dice que el campo de interpretación es un *modelo* para el sistema formal.

El aspecto recíproco es una propiedad más fuerte: a todo enunciado cierto del modelo corresponde una fórmula derivable del sistema. En este caso se dice que el sistema es *completo* para este modelo, etc.

Hay, pues, toda una gama de propiedades semánticas. Supongamos que sea posible estudiarlas de acuerdo con los cánones del rigor matemático: se habrá producido un *concepto* teórico del modelo.

Grande resulta entonces la tentación de exportar este concepto a la epistemología general. Se dirá, por ejemplo, que la parte puramente teórica o matemática de la física es su sintaxis; que el momento experimental proporciona interpretaciones concretas, que equivalen, de ahí, a la semántica de los algoritmos; que si la parte teórica de la ciencia incumbe a la evaluación por la consistencia, la experimentación requiere que nos interroguemos acerca de los modelos concretos. Los dispositivos experimentales serán a la vez los artificios de la construcción de tales modelos y el espacio de ejercicio de las reglas de correspondencia entre el *cálculo* formal y las *medidas* concretas.

Toda elección científica estará implicada tan pronto por el modelo (experimental) y las reglas de correspondencia y tan pronto por el sistema y las reglas sintácticas.

Carnap escribió un libro cuyo solo título, *Meaning and Necessity*, ya refleja, por la oposición-correlación del sentido y la necesidad, la problemática en cuestión: compulsión sintáctica de la deducción, exactitud semántica de las interpretaciones. Carnap lo ilustra con un ejemplo sencillo: si la experiencia puede vincularse a algoritmos matemáticos, si es calculable, lo es en la medida en que los fenómenos pueden medirse. La medición, gracias a la cual el hecho se vuelve número, es en este caso una operación semántica esencial. Pero todo resultado de una medición se expresa en un *número racional* (con mayor precisión,

en un número que sólo tiene un número finito de decimales), ya que las operaciones "concretas" de medición son necesariamente finitas. La semántica sólo le impone a la física, a la física como cuerpo de números de base, el cuerpo de los racionales. Desde un punto de vista sintáctico, no obstante, la limitación al cuerpo de los racionales arrastraría graves complicaciones. Por ejemplo, el operador "raíz cuadrada" no tendría generalidad alguna, puesto que un número racional carece con suma frecuencia de raíz cuadrada racional. Por lo tanto será preferible utilizar el cuerpo de los *números reales* (cuyo desarrollo decimal puede ser infinito). La adopción de este cuerpo básico para la física tiene que ver, por consiguiente, con una exigencia de simplicidad sintáctica. Vemos, pues, que la oposición entre la investigación empírica —para hablar como Carnap— y la *necesidad matemática es pertinente*, pudiendo señalársela en los tipos de compulsión que ejerce sobre el lenguaje adoptado.

Además, la unidad de esa oposición puede estudiarse de este modo: pertenece a la articulación de la compulsión sintáctica sobre la compulsión semántica. En el ejemplo *considerado, la experiencia puede funcionar como* modelo de la teoría porque el cuerpo de los números racionales es un subcuerpo del cuerpo de los números reales. Toda medición será, luego, expresable en el lenguaje formal (sistema de los reales), en el que los racionales quedan efectivamente *marcados*, y las formas del cálculo —*las operaciones*— *quedarán*, en lo esencial, conservadas gracias a cierta invariación de la "especie de estructura"; los números reales y los números racionales, que forman cuerpos, o sea, conjuntos —adición o multiplicación—, y *sus* inversas quedarán en todas partes definidos (excepto, claro está, la operación "inversa" para 0).

Parecerá legítimo basar una epistemología de los modelos en el estudio sistemático de las correspondencias entre conceptos sintácticos y conceptos semánticos.

¿Es esta perspectiva idéntica a la que hemos criticado a través de un texto de Lévi-Strauss? Sí y no.

Sí, en la medida en que restaura, por las apariencias, la diferencia entre lo empírico y lo formal, entre lo corroborable y el lenguaje artificial en el que lo corroborable,

viene a señalarse.

No, por varias razones.

a) Ante todo, *trastorna* la concepción de que hemos partido. Para Lévi-Strauss, lo formal, lo *bricolé*, el artefacto, es modelo con respecto a un campo empírico dado. Para la semántica positivista, el modelo es una interpretación de un sistema formal. Por lo tanto, los modelos del artificio sintáctico son lo empírico y lo dado. Así se hace presente una especie de reversibilidad de la palabra "modelo".

b) Pero sobre todo la tesis del positivismo lógico se apoya de manera explícita en una ciencia: la lógica matemática, en la que la distinción clave entre sintaxis y semántica funciona conceptualmente.

Si se dice que el modelo debe "dar razón" de todos los hechos, estamos en presencia de un aserto que no hace más que redoblar, que *variar* la pareja fundamental de la epistemología vulgar. En cambio, si se habla de la completitud de un sistema formal, se designa una propiedad eventualmente demostrable, o refutable. El objeto de uno de los más famosos *teoremas* de Gödel consiste en establecer la incompletitud del sistema formal de la aritmética, o sea, de un sistema formal que admite por *modelo* a la aritmética recursiva, a la aritmética "clásica". Los criterios de la sintaxis pertinente con respecto a un modelo dado no se le entregan a la arbitrariedad de las semejanzas. Son propiedades teóricas.

El problema de saber qué ocurre finalmente con la *categoría* de modelo se desenvuelve íntegramente en la diferencia entre Carnap y Lévi-Strauss, es decir, en el exacto alcance epistemológico del *concepto* lógico, científico, de modelo, alcance que representa lo único capaz de validar o de no validar su exportación a los fines de construir una categoría filosófica. En este punto no podemos evitar un rodeo meramente lógico.

Como se trata de un rodeo que exige cierta atención, es justo señalar por anticipado su propósito y destacar su necesidad: el asunto estriba en poner a la luz epistemológica una construcción (científica) del concepto. De la práctica de esta construcción se aguarda sobre todo una

exacta captación de la diferencia entre el concepto de modelo y la *noción* (ideológica) *homónima*. Pero además, por los comentarios que la acompañan, por la señalada disposición de sus tiempos sucesivos, la construcción demostrativa sirve para hacer válida otra diferencia, cual es la que desglosa dos usos categoriales (filosóficos) de la palabra "modelo". *En otros términos, nuestra lectura* de la ciencia gobierna, río arriba, su distancia respecto de la ideología, y río abajo, una línea de deslinde en el discurso filosófico, o sea, dos estilos antagónicos de discursos *sobre* la ciencia, dos formas de reapropiación ideológica de la ciencia, y finalmente, dos *políticas* de la ciencia: una progresista y una reaccionaria.

Le pido, pues, al lector que no vaya muy rápido respecto de las explicaciones técnicas y que no se apresure en sacar conclusiones. La *realidad* de la epistemología materialista en la que intento introducirlo forma cuerpo con una práctica efectiva de la ciencia. Tratándose de lógica matemática, esta práctica casi no requiere preparación técnica alguna.

6. Construcción del concepto de modelo

I. PRELIMINARES SINTACTICOS

A riesgo —inherente al intento epistemológico— de decir demasiado para quien practica la ciencia considerada y demasiado poco para los demás, voy a proponer, a título de ejemplo, la definición por etapas de los modelos relativos a un lenguaje lógico sencillísimo, aunque de un uso frecuente. La decisión irrevocable consistirá en ser elemental en sentido estricto, en no presuponer conocimiento especial *ninguno*. No seré muy cuidadoso y sólo desearé hacer captar la articulación de una construcción del concepto. Para un desarrollo más amplio, pero igualmente pronto para ser introducido en los problemas epistemológicos, habrá que dirigirse al apartado 8; y para un trata-

miento riguroso, al 9. Será útil tener a la vista el desplegable que va al final del libro.

Encaremos primeramente la sintaxis.

Nuestra lengua calculable–nuestro juego con las escrituras– apunta a ser un dispositivo experimental matemático, es decir, un sistema de inscripciones que obedece a condiciones específicas. Por lo tanto, debemos disponer de un stock de marcas suficientes para distribuir varias "especies" de inscripciones, que son las *piezas* del juego.

A) Deseamos designar la diferencia *fija* de nuestros objetos, sin que "objeto" signifique aquí nada más que lo que se encadena a la experimentación escriptural. Para ello utilizaremos una nómina –finita o infinita, pero enumerable– de letras: a, b, c, a', b', c'. . . Las llamaremos *constantes individuales*. Digamos desde ahora mismo que, como regla general, no serán intercambiables en una escritura determinada.

B) Deseamos designar las propiedades de los objetos, vale decir, destacar ciertas clases de constantes, cuales son las que "satisfacen" una propiedad. Utilizaremos marcas predicativas, o predicados: P, Q, R, P', Q'. . .

La sencillez de nuestro ejemplo estriba en el hecho de que sólo admitiremos predicados "unarios" capaces de marcar una constante por vez únicamente. En las sintaxis matemáticas usuales se admiten predicados binarios –o relaciones– que marcan pares de constantes, y hasta predicados "n-arios", que marcan un sistema de n constantes[1]. La forma general de la construcción del concepto de modelo no deja de ser por ello esencialmente la misma.

C) Deseamos por último designar la "generalidad" del campo objetivo, es decir, una constante cualquiera, in-

[1] Sea, por ejemplo, el campo semántico de los números enteros naturales. "Ser un número primo" se escribirá, dentro de una experimentación sintáctica, con la forma de un predicado unario: P(n), por ejemplo. "Ser mayor que", con la de un predicado binario: x es mayor que y, o (x. y), si se prefiere. "Ser la suma de. . . y de. . .", con la de un predicado ternario: S(x, y, z) z es la suma de x y de y), etc.

determinada, un *lugar* en el que pueda asentarse cualquier constante. Estas marcas indeterminadas podrán remplazarse de manera eventual, por consiguiente, por constantes, y debido a esta razón la llamaremos *variables individuales* Las escribiremos: x, y, z, x', y'. . .

Ya podemos *formar* ciertas expresiones o series de marcas. No todas las series serán correctas: el criterio del sentido sintáctico –que el juego no sea completamente arbitrario– interviene aquí por el lado de las *reglas de formación.* No entraremos en detalles. Está claro que regularemos la marcación de una constante (o de una variable) por un predicado. Para ello, resultará cómodo disponer de *marcas de puntuación,* paréntesis y corchetes. Por ejemplo, P(a) será una expresión correcta (bien formada) que se leerá, si se quiere "a posee la propiedad P". Del mismo modo con respecto a P(x). Escrituras de este tipo, que sólo contienen, además de las puntuaciones, dos marcas, se llamarán *fórmulas elementales.*

El uso de las variables sólo tiene verdadero interés cuando se desea poder escribir enunciados generales, cuya interpretación semántica vendría a ser: "Existe por lo menos una constante marcable por el predicado P", o: "Toda constante es marcable por P". Para ello introducimos los clásicos cuantificadores: universal, que escribiremos U y que se lee "para todo"; y existencial, que escribiremos E y que se lee "existe". Hay, pues, una regla de formación que autoriza las escrituras de este tipo:

– (Ex)P(x), que se lee "existe x tal que P(x)".
– (Ux)P(x), que se lee "para todo x, P(x)".

Observemos bien que tales enunciados se proponen aquí no más que como ejemplos de escrituras aceptables, legibles, bien formadas, pero no como "teoremas" o "enunciados verdaderos".

En estas expresiones la variable cuantificada x no puede ser reemplazada por una constante. Es muy comprensible. El enunciado (Ex)P(x) no nos dice *qué* constante particular es marcable por P, sino tan sólo que hay una constante. El enunciado (Ux)P(x) nos dice que toda constante es marcable por P, y no tal o cual. De ahí una

distinción relativa al tipo de inscripción, distinción que es importantísima de aquí en adelante:

Definición: una variable que cae dentro del campo de un cuantificador se llamará variable *ligada*; caso contrario se llamará *libre*.

Dejemos atrás una etapa suplementaria en la complejidad combinatoria de nuestro dispositivo. Deseamos poder construir escrituras que combinen no sólo letras, sino también fórmulas elementales y fórmulas elementales cuantificadas, para combinar en seguida estas combinaciones. Con ese motivo introduciremos operadores lógicos, *conectadores* que toman por argumento fórmulas "ya" construidas. Utilizaremos dos, suficientes, por lo demás, para las necesidades de cualquier dispositivo lógico-matemático: *la negación*, que anotaremos ~, y la *implicación*. Las reglas de formación asociadas a estos signos son muy simples:

– Si A es una expresión bien formada, ~ A también lo es.
– Si A y B son expresiones bien formadas, (A → B) también lo es.

La primera expresión se lee "no A"; la segunda "A implica a B".

Convendremos, por último, en que es dable *cuantificar* las expresiones bien formadas así obtenidas, con la condición de que la variable sobre la cual recae el cuantificador sea en tal caso libre. Por ejemplo, si la variable x es *libre* en A y en B (si no está *ya* cuantificada en A o en B), la expresión (Ux) (A → B) es una expresión bien formada.

Ahora nos hallamos en condiciones de escribir expresiones bien formadas complejas; las llamaremos *fórmulas* del sistema. A título de ejemplo y para reunir nuestras convenciones:

$$(Ux)\ [\sim P(x) \rightarrow (Q(y) \rightarrow P(a))]$$

es una fórmula y la leeremos: "Para todo x, si x no tiene la propiedad P, entonces el hecho de que y tenga la

propiedad Q da por sobreentendido que a posee la propiedad P". En esta fórmula, la variable x es *ligada* y la variable y es *libre*. Una fórmula como ésta (que contiene por lo menos una variable libre) se llamará *abierta*.

$$(Ex)\,[P(x) \to \sim Q(x)]$$

que se leerá: "Existe x tal que, si x tiene la propiedad P, entonces no tiene la propiedad Q"; es una fórmula que no contiene ninguna variable libre; es una formula *cerrada*.

Falta darle al juego su forma *deductiva*, o sea, montar un dispositivo que distinga entre las expresiones bien formadas aquellas que son teoremas (aquellas que se pueden deducir) y aquellas que no lo son.

Para ello definimos ante todo *reglas de deducción* que permiten *producir* una fórmula a partir de otras fórmulas mediante manipulaciones explícitas. Vigilaremos por que las fórmulas así alineadas sean en todos los casos bien formadas.

En nuestro ejemplo las reglas son las que siguen:

1) Dada una expresión ya producida (o un axioma) A en la que la variable x es libre, se puede "producir" la expresión (Ux) A.

El esquema de deducción se escribe, por lo tanto (el signo |– indica que "anteriormente" se ha producido la fórmula A dentro del sistema, o que ésta es un axioma):

$$\frac{\vdash A(x \text{ libre en } A)}{\vdash (Ux)\,A}$$

Es la regla llamada de *generalización*.

2) Dadas las dos fórmulas (A → B) y A, se considera como una regla de deducción anotar seguidamente la fórmula B:

$$\frac{\begin{array}{l}\vdash A \to B\\ \vdash A\end{array}}{\vdash \quad B}$$

Es la regla llamada de *separación*.

El apéndice de este libro convencerá al lector acerca de las posibilidades ofrecidas al juego deductivo por estas dos únicas reglas.

Insistimos de paso en la importancia del carácter *efectivo*, mecánico, de éstas (como, por lo demás, en la de las reglas de formación). A decir verdad, la categoría filosófica del procedimiento efectivo, de lo que es, gracias a una serie de manipulaciones escriturales carentes de ambigüedad, explícitamente calculable, se halla en el centro de toda epistemología de las matemáticas. Esto incumbe al hecho de que tal categoría concentra el aspecto propiamente experimental de las matemáticas, o sea, *la materialidad de las marcas*, el montaje de las escrituras. Bachelard observa[2] que en física el verdadero principio de identidad es el de la identidad de los instrumentos científicos. En el problema de lo calculable, en la interrogación sobre la esencia de los algoritmos, volvemos a toparnos con el principio de la invariación de las escrituras y del control de ésta. La demostración matemática *se prueba* en la regulación explícita de las marcas. En matemáticas la escritura representa el momento de la verificación.

Una vez instituidas las reglas de deducción, hay que elegir fórmulas iniciales: los axiomas. Esta elección caracteriza a la teoría considerada, signa su particularidad, ya que todas las demás reglas de nuestro lenguaje (formación y deducción) son generales. La elección de los axiomas representa la diferencia demostrativa.

Ahora disponemos, en efecto, de un concepto de la *deducción*.

Definición: una serie finita de fórmulas es una deducción si cada una de las fórmulas que la componen

– o bien es un axioma

– o bien resulta de la aplicación, a fórmulas que la preceden dentro de la serie, de una regla de deducción.

2 *L'activité de la physique rationaliste.*

Toda fórmula (axioma o fórmula producida) que figure en una deducción es un *teorema* del sistema.

Supongamos, por ejemplo, que hayamos elegido estos dos axiomas:

ax 1: $\vdash P(x)$
ax 2: $\vdash (Ux)P(x) \rightarrow \sim Q(a)$

El lector verificará (¡sin el menor esfuerzo!) que la serie:

$\vdash P(x)$
$\vdash (Ux)P(x)$
$\vdash (Ux)P(x) \rightarrow \sim Q(a)$
$\vdash \sim Q(a)$

es una deducción conforme a las dos reglas que ya hemos introducido (generalización y separación). La fórmula $\sim Q(a)$ es, por tanto, un teorema del sistema; lo especifican los dos axiomas.

Podemos distinguir axiomas *lógicos* y axiomas *matemáticos*. Los primeros nada tienen que ver, dentro de la forma escriptural que los caracteriza, con las constantes fijas (individuales o predicativas); en cambio, los segundos regulan a menudo el uso de éstas, a las que podemos llamar símbolos no lógicos de la teoría.

En rigor, frecuentemente se utilizan como axiomas lógicos series infinitas de fórmulas cuya estructura (ley de formación o de inscripción) es la misma. Así, *todos* los enunciados (en número infinito) del tipo de $[A \rightarrow (B \rightarrow A)]$, en que A y B son expresiones bien formadas cualesquiera, son a menudo observados como axiomas en un cálculo como el de nuestro ejemplo. Por supuesto, en la mayoría de las expresiones de este tipo figuran constantes. Y de esta manera la expresión

$$[P(a) \rightarrow [Q(b) \rightarrow P(a)]]$$

contiene cuatro constantes: dos individuales y dos predicativas. Es, no obstante del tipo requerido $[A \rightarrow (B \rightarrow A)]$ y figura, por lo tanto, en la nómina de los axiomas. Peró las

constantes a, b, P y Q no caracterizan en absoluto a este tipo ni fundamentan la pertenencia de la fórmula a la nómina. Lo único discutible es la conformidad global de la "estructura" de inscripción. De manera, pues, que, reemplazando todas las constantes por otras o por variables, obtengo una fórmula que también viene a ser, dentro de la nómina, un axioma de la misma especie. Consideraremos, luego, que el esquema que gobierna la nómina, como sólo depende del conectador lógico que figura en ella (la implicación), es un esquema *lógico*.

En cambio, sea S un predicado fijo y tenga una constante; consideremos este eventual axioma:

$$(Ex)\,[S(x) \rightarrow \sim S(a)]$$

Está claro que el predicado S es completamente particular; no es reemplazable por un predicado cualquiera, como tampoco lo es, por lo demás, la constante individual a. El axioma define (implícitamente) a S como un predicado que contiene poderes de marcación *diferenciales* con respecto a la constante a. Efectivamente el axioma dice formular que existe una constante, por lo menos una, tal que, si es marcable por S, entonces a no lo es. Según S, hay incompatibilidad entre a y esta otra constante (indeterminada).

Un axioma como éste (separador) será considerado *matemático*. Entendámonos: se lo considerará como vinculado al dispositivo experimental de una particular teoría matemática.

Más adelante hemos de ver, con todo, que la diferencia intrasintáctica entre axiomas lógicos y axiomas matemáticos sólo es plenamente pensable en su referencia a los modelos en que tales axiomas son "verdaderos".

7. Construcción del concepto de modelo

II. ASPECTOS FUNDAMENTALES DE LA SEMANTICA

Intentaremos hacer "corresponder" al sistema cuya sinta-

xis acabamos de describir una interpretación.

La primera idea estriba, de seguro, en fijar el campo de objetos en el cual fundamentar la correspondencia con las marcas del sistema, sólo que nada es más indistinto ni más empirista que la noción de una colección de objetos, hasta el extremo de que, de atenernos a ello, la semántica no tendría la menor posibilidad de articularse científicamente: *la teoría de las interpretaciones de un sistema formal se salva de tal impotencia únicamente en la medida en que dispone del concepto matemático de conjunto y transforma por su efecto la noción de multiplicidad comunal*.

Convengamos en llamar *estructura* al siguiente dispositivo:

A) *Un conjunto no vacío V*, al que llamaremos dominio o universo.

Ser un "objeto" de la estructura significará pertenecer a este conjunto. Pero la pertenencia no es en este caso otra cosa que el signo fundamental de la teoría de los conjuntos, ϵ y su rigor es el de esta misma. Ya vemos que la semántica sólo es una ciencia (y el modelo un concepto) en la medida en que se establece *dentro* de una rama existente de las matemáticas, de modo que la ley de las interpretaciones de un sistema formal (matemático) se inscribe en la matemática misma (no formal). Que no haya sin embargo en ello círculo ni saber absoluto, ya trataremos de esclarecerlo.

Utilizaremos las letras u, v, w, u', v'... para la marcación de las diferencias del universo. Escribiremos $u \epsilon V$ la propiedad de ser un "objeto" del universo, destacando de paso que, en materia de objeto, sólo tenemos aquí una inscripción *diferente* de todas las inscripciones que figuran en el dispositivo sintáctico; tan cierto es ello, que la experimentación matemática no tiene otro lugar material que aquel en el que se pone de manifiesto la diferencia de las marcas.

B) *Una familia de subconjuntos de V*, que escribiremos [pV], [qV] [rV]... Admitiremos que en ésta puede figurar

el conjunto vacío (el conjunto que no tiene elemento alguno).

¿Tenemos el derecho de considerar a una "familia" como ésta como un conjunto y de asignarle el rigor conceptual inherente a la matemática de los conjuntos? Sí, por lo mismo que la matemática plantea (axioma del conjunto de las partes) la existencia del conjunto de todos los subconjuntos del conjunto V dado, del que nuestra familia es una parte definida. Y sí, también, en la medida en que esta teoría formula axiomáticamente la existencia del conjunto vacío.

C) *Dos marcas suplementarias: Ver y Fal*

Estas marcas han de leerse, si se quiere, "verdadero" y "falso". Pero tal denominación, en la que resuena el origen intuitivo, es decir, ideológico-filosófico, de la semántica, es inesencial y hasta parasitaria; lo único que cuenta aquí es la permanente imposibilidad de confundir ambas marcas, la invariación del principio de ensambladura del que son la experiencia asentada.

Todo dispositivo del tipo prescripto por nuestras condiciones A), B) y C) es una estructura. Es vincular a estructuras un sistema formal que se emplea en la semántica.

Supongamos que existe una *función* –escrita f–, función de correspondencia definida sobre las marcas sintácticas y tal que:

1º) a toda *constante individual del sistema* haga corresponder un *objeto de la estructura*. Así, f(a) = u.

2º) a toda *constante predicativa* haga corresponder un subconjunto de la familia que define la estructura: f(P) = [pV].

Observemos que f opera "entre" las marcas del sistema formal y las de la estructura, transportando la jerarquía constante individual/constante predicativa sobre la jerarquía: marca de un elemento del universo/marca de un conjunto de elementos del universo.

Esta transferencia no requiere la sencillez de nuestro ejemplo: si el sistema admitiese, además de las constantes

predicativas, constantes de relación binaria, o sea, marcas asignadas a pares de constantes, consideraríamos estructuras más complejas, con lo que haríamos intervenir conjuntos de pares de elementos del universo. La teoría de los conjuntos garantiza, gracias al axioma de los pares, la existencia de un conjunto cuyos elementos son dos conjuntos dados.

La idea que va a gobernar ahora la construcción del concepto de modelo es ésta: utilizando los recursos conjuntistas de la estructura y la función f, daremos ún sentido a la *validez* para la estructura, o a la no validez, de una expresión bien formada del sistema formal. Si podemos poner luego en relación la *deductibilidad* sintáctica (el hecho de que la expresión A es un teorema) con la *validez* semántica (el hecho de que A es válido para una estructura, o para determinado tipo de estructura, incluso para cualquier estructura), podemos esperar delinear las condiciones en las que una estructura particular es un modelo para el sistema.

La evaluación de una fórmula A se efectúa de manera gradual, gracias a las marcas Ver y Fal.

Primeramente formularemos:

Regla 1: P(a) = Ver si y solamente si
$f(a) \in f(P)$;

si no, P(a) = Fal. En otras palabras, a la expresión según la cual a posee la propiedad P hacemos corresponder la marcación por Ver (la "verdad") si el elemento u, que corresponde (por f) a la constante a, pertenece al subconjunto [pV], que corresponde al predicado P.

Regla 2: $\sim$ A = Ver si y solamente si A = Fal. Si no, $\sim$ A = Fal. Es la clásica interpretación de la negación.

Regla 3: (A → B) = Fal si y solamente si A = Ver y B = Fal. Si no, (A → B) = Ver.

Una implicación sólo es "falsa" si, siendo verdadero el antecedente, el consecuente es falso.

Volvamos ahora a los cuantificadores. Sea la expresión

B en la que la variable x es libre. Escribamos B(a/x) la expresión obtenida al remplazar en B, en todo sitio donde esté marcada, la variable x por la constante a. Formularemos:

Regla 4: Sea B una expresión que no contiene otra variable libre que x. Luego, (Ex)B = Ver si y solamente si existe por lo menos una constante (digamos, a) tal que B(a/x) = Ver. Si no (Ex)B = Fal.

Regla 5: En las mismas condiciones, (Ux)B = Ver si y solamente si para *todas* las constantes a, b, c, etc., tenemos B(a/x) = Ver, B(b/x) = Ver, etc.

Falta el caso de las fórmulas elementales del tipo de P(x) y, de un modo más general, el caso de las fórmulas abiertas (que contienen variables no cuantificadas). Nuestras reglas sólo nos permiten evaluar, efectivamente, las fórmulas cerradas, y ello de una manera paulatina. Es completamente normal. La "verdad" de una fórmula abierta no es fija; depende de la constante que sustituye a la variable. Así, la expresión P(a) → P(x), en que la variable x es libre, es falsa para la mayoría de las estructuras si remplazamos x por una constante diferente de a. En cambio, la expresión P(a) → P(a) es verdadera para cualquier estructura, sea la que fuere. La evaluación de una fórmula abierta debe tomar en cuenta, por lo tanto, todas las sustituciones posibles: hay que ensayar todas las combinaciones obtenidas gracias al remplazo de las variables libres por todas las constantes del sistema.

Generalizamos, pues, el procedimiento empleado para la evaluación de las expresiones cuantificadas. Sea A una fórmula abierta, y sean x, y, z. . . las variables libres *diferentes* que ésta contiene. Llamamos *instancia cerrada* de A a una fórmula como a(a/x) (b/y) (c/z), en que todas las variables libres de A han sido remplazadas por constantes. Naturalmente hay un gran número de instancias para una fórmula abierta dada; este número depende tanto del número de variables diferentes que son libres en la fórmula como del número de constantes individuales del sistema formal considerado. Evidentemente, tales instan-

cias son, en su totalidad, fórmulas cerradas (sin variable libre), y pueden por lo tanto evaluarse mediante el empleo reiterado de las cinco reglas precedentes.

Formularemos, pues, la siguiente definición crucial:

Definición: Una fórmula A del sistema es *válida* para una estructura si para *toda* instancia cerrada A' de A se tiene, con respecto a esa estructura, A' = Ver.

De modo particular, una fórmula cerrada A es válida si A = Ver, puesto que no tiene otra instancia cerrada que ella misma (nada en ella es remplazable).

Observaremos que este procedimiento se construye por recurrencia sobre la "longitud" de las fórmulas, es decir, sobre el *número de las marcas* que las constituyen. Se parte de las fórmulas elementales como P(a), que evaluamos directamente en la estructura, al examinar la eventual pertenencia del "representante" semántico de a en el subconjunto del universo que representa P. En seguida se dictan las normas relativas al procedimiento que permite evaluar una expresión A a partir de la evaluación –supuestamente obtenida– de las expresiones más cortas que contiene A o que contienen sus instancias cerradas. Así, la evaluación de ~ B se lleva a cabo a partir de la de B; la de (Ex)B a partir de b(a/x), etc.

La convicción de que estas reglas garantizan la existencia de una evaluación para una fórmula de cualquier longitud equivale a admitir el razonamiento por recurrencia sobre los números enteros (en este caso, sobre el número de símbolos que entran en la composición de una fórmula). Esto sugiere dos enunciados epistemológicos:

1) La construcción rigurosa del concepto de modelo, del que la evaluación es un momento, implica que la escritura formalizada sea "enumerable" mediante los enteros numerales; dicho de otra manera, implica que una expresión bien formada del sistema formal sea una serie *enumerable* y hasta (respecto de la mayoría de los sistemas), *finita* de marcas indescomponibles. Hablar de modelo es excluir la idea de que un lenguaje formal pueda ser continuo.

2) Después de haber recurrido explícitamente a la matemática de los conjuntos, recurrimos en este punto, de un modo más o menos implícito, a la matemática de los números enteros y especialmente al axioma de inducción, que la caracteriza. Hablar de modelo es presuponer la "verdad" (la existencia) de tales prácticas matemáticas. Nos instauramos desde un primer momento en la ciencia. No la reconstituimos a partir de nada. No la basamos.

Daremos un paso más cuando comprobemos que las reglas de deducción del sistema formal "conservan" la validez: si A es válida y B es producida por aplicación de una regla a A, entonces B es válida, y esto cualquiera que sea la estructura en que se define la validez. Ni qué decir que en realidad hemos escogido precisamente las reglas para las que aseguran una especie de regularidad semántica.

Verifiquemos rápidamente este aserto con respecto a nuestras reglas de generalización y separación.

Sea en primer término el esquema de la generalización. Supongamos que A sea válida y que (Ux)A no lo sea. La segunda parte de esta hipótesis implica, según la definición de la validez, que existe una instancia cerrada (Ux)A' de (Ux)A tal que (Ux)A' = Fal. Según la regla 5, esto equivale a decir que hay por lo menos una constante a para la cual A'(a/x) = Fal. Pero A'(a/x) es una instancia cerrada de A. Ahora bien, hemos supuesto que A es válida; por lo tanto, toda instancia cerrada de A es igual a Ver. Hay contradicción, y nuestra hipótesis debe ser rechazada.

Destaquemos de paso que, al invocar para concluir el principio de no contradicción, empleamos una lógica "en estado práctico". Desde luego que las premisas matemáticas de nuestra construcción de concepto (teoría de los conjuntos, teoría de los números enteros naturales) sirven de vehículos asimismo a la lógica subyacente, a los procedimientos prácticos de encadenamiento en los que se articulan tales fragmentos matemáticos. No se trata de que semejantes "principios lógicos" recarguen el pensamiento, como ocurre, precisamente, en la metafísica de Aristóteles, con el principio de no contradicción. Estos "principios", por el contrario, forman parte de lo que

experimentamos en el campo de la producción matemática concreta, y no tienen otra existencia. De manera, pues, que son, por los mismos motivos que los enunciados matemáticos, susceptibles de una verificación sintáctica dentro del marco del montaje de sistemas lógicos.

Sea ahora la regla de separación. Supondremos, para simplificar, que todas las fórmulas son cerradas. Si la conclusión B = Fal, la regla 3 plantea que A = Ver entraña (A → B) = Fal. Pero suponemos A y A → B válidas. Resulta imposible, por lo tanto, que tengamos B = Fal. B es, luego, válida.

Nuestras reglas de deducción transportan, de tal modo, la validez. De ello resulta esta consecuencia mayor: *si los axiomas de una teoría son válidos, todo teorema de la teoría también lo es.* En efecto, una deducción comienza por un axioma y sólo comporta, seguidamente, axiomas o fórmulas producidas, a partir de las que la preceden, por aplicación de las reglas: si los axiomas son válidos, toda fórmula que figure en una deducción es válida.

La función de correspondencia, que sostiene los procedimientos de evaluación, define entonces una especie de inferencia —por el concepto sintáctico de enunciado deducible— del concepto semántico de enunciado válido-para-una-estructura.

Hemos alcanzado nuestra finalidad, y formulamos:

UNA ESTRUCTURA ES MODELO DE UNA TEORIA FORMAL SI TODOS LOS AXIOMAS DE ESTA SON VALIDOS PARA AQUELLA.

8. Construcción del concepto de modelo

III. JUEGOS SOBRE EL EJEMPLO

Ya he mencionado la separación que debe hacerse entre lógica y matemática. En esto, el criterio más seguro estriba en el hecho de que un axioma es *lógico* si es válido para *toda* estructura, y matemático si no lo es. Un axioma

matemático, válido sólo en estructuras especiales, marca su identidad formal por la exclusión que hace de los demás dentro de sus poderes semánticos. La lógica, semánticamente reflexionada, es el sistema de lo estructural como tal; la matemática, teoría, como dice Bourbaki[1], de las *especies de estructuras*.

¿Hay en verdad en nuestro ejemplo expresiones correctas válidas para toda estructura? Sí, por cierto. Hemos mencionado el esquema $A \to (B \to A)$ en el que A y B son expresiones cualesquiera. Una fórmula conforme a este esquema es siempre válida, cualesquiera que fueren las evaluaciones de A y B; consiguientemente, cualquiera que fuere la estructura. En efecto:

Supongamos que	$[A \to (B \to A)] = \text{Fal}$	(1)
Entonces (regla 3)	$A = \text{Ver}$	(2)
e (ídem)	$(B \to A) = \text{Fal}$	(3)
(3) entraña a su vez		
(regla 3)	$A = \text{Fal}$	(4)

(4) contradice a (2): nuestra hipótesis debe ser rechazada, y siempre tenemos:

$$[A \to (B \to A)] = \text{Ver}$$

En un abuso de lenguaje, podemos decir: El esquema es siempre válido.

Pero nada le costaría al lector mostrar, por ejemplo, que los esquemas

— — $(\sim A \to \sim B) \to (B \to A)$
— — $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$

son válidos con independencia de toda particularidad de la estructura. Estos enunciados son puramente lógicos. Añadidos al esquema anterior, bastan, por lo demás, para definir un importante sistema lógico, cual es el cálculo de las proposiciones (véase el Apéndice). Existe, evidentemente, una infinidad de otras fórmulas puramente lógicas,

1 Véase la construcción del concepto de especie de estructura en: Baourbaki, *Théorie des ensembles*, Cap. 4, No 1.

así sean no más que las que podemos inferir de las tres primeras por las reglas de deducción, puesto que conservan la validez.

La introducción de los cuantificadores no excluye en modo alguno la pureza lógica para ciertos enunciados, aunque aparentemente "existe" o "para todo" dependen estrechamente, en cuanto a su validez, del universo elegido. Demos otro ejemplo, muy sencillo. Sea la expresión correcta

$$\sim (Ex)P(x) \rightarrow [(Ex) \sim P(x)]$$

que vincula existencia y negación para el predicado P.

Supongamos que su evaluación da la marca Fal. Entonces (regla 3), el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Sea

1a. parte de la hipótesis	$\sim (Ex)P(x) = \text{Ver}$	(1)
que da (regla 2):	$(Ex)P(x) = \text{Ver}$	(2)
que da (regla 4), para toda constante a:	$P(a) = \text{Fal}$	(3)
2a. parte de la hipótesis	$(Ex) \sim P(x) = \text{Fal}$	(4)
que da (regla 4), para toda constante a:	$\sim P(a) = \text{Fal}$	(5)
que da (regla 2):	$P(a) = \text{Ver}$	(6)

El resultado (6) contradice a (3): nuestra hipótesis debe ser rechazada, y la expresión de que hemos partido no puede en ningún caso valer Fal. Es, por lo tanto, válida para toda estructura: es puramente lógica.

Observando esta definición semántica de los axiomas lógicos, vemos, pues, que éstos no dicen *nada* acerca de las estructuras en las que puede interpretarse el sistema formal.

Tal es el resultado experimental por lo que atañe a la presunta "transhistoricidad" de la lógica. Ya lo hemos dicho: no hay contradicción alguna entre la *práctica* lógica inherente a toda demostración y la construcción de *sistemas* lógicos especiales. O, mejor dicho, la contradicción no es en tal caso más que la dialéctica viva de la demostración (semántica) y de la experimentación(sintác-

tica).

Para establecer la "transhistoricidad" de la lógica suele echarse mano a un aparente círculo vicioso: no es posible formular *sobre* los principos lógicos ningún discurso racional (a no ser el testimonio de su "evidencia") puesto que la racionalidad se define precisamente por la conformidad del discurso a estos principios. La lógica ya estaría allí siempre y sería, por lo tanto, condición y no resultado de la historia de la Razón.

Procuramos decir que en realidad la lógica es en sí misma una construcción histórica, doblemente articulada en principios activos de las demostraciones concretas y figuras explícitas de un montaje formal. El "círculo" se despeja con la separación de la práctica demostrativa respecto de la inscripción experimental (o "formal'), separación que constituye el *motor* de la historia de esta ciencia. Este modo de existencia histórica no diferencia en nada a la lógica de las matemáticas.

Por último, la "transhistoricidad" de la lógica se reduce a la propiedad experimental de que *un sistema puramente lógico (cuyos axiomas son, en su totalidad, lógicos) no contiene marcación alguna de sus modelos.* O con mayor exactitud: como para el sistema toda estructura es modelo, el concepto de modelo no es *lógicamente distinguible* del concepto de estructura.

Solamente los axiomas matemáticos resuelven la indistinción semántica y efectúan la efectiva inscripción de una *separación* estructural en la que se legitima el concepto de modelo. De ahí que un lógico como Church prefiera denominar *postulados* a las fórmulas iniciales no puramente lógicas.

Sin embargo, el concepto del lógico se construye, precisamente, con arreglo a la pareja que forma con el del matemático: no lo domina. La oposición entre el matemático y el lógico duplica sintácticamente la distinción semántica entre el modelo y la estructura. De ahí que, a la vista de un sistema formal dado, la diferencia de dos estructuras resida en el hecho de que una es modelo y la otra no, con lo que es dable clasificar los axiomas dentro del sistema en puramente lógicos y matemáticos; los primeros marcan la unidad de aquello cuya diferencia mar-

can los segundos.

Además, el instrumento de esta distinción conceptual, o sea, el concepto de estructura y por consiguiente la teoría de los conjuntos, es, por su parte, matemático, por el hecho de que esta teoría, supuestamente formalizada, no admite, evidentemente, estructura alguna por modelo, sea la que fuere. Habremos de insistir respecto del efecto histórico de este intrincamiento.

Para concluir, demos un ejemplo elemental de enunciado propiamente matemático. Sea la fórmula

$$(Ex)\ (Ey) \sim [(P(x) \rightarrow \sim P(y)) \rightarrow (\sim (\sim P(y) \rightarrow P(x)))]$$

Una fórmula como ésta no podría ser válida para una estructura *cuyo universo sólo contuviese un único elemento.* Supongamos, en efecto, que tengamos para una estructura de este tipo:

$$(Ex)\ (Ey) \sim [(P(x) \rightarrow \sim P(y)) \rightarrow (\sim (\sim P(y) \rightarrow P(x)))] \models \text{Ver}\ (1)$$

Luego (regla 4), existe una constante a tal que:

$$(Ey) \sim [(P(a) \rightarrow \sim P(y)) \rightarrow (\sim (\sim P(y) \rightarrow P(a)))] = \text{Ver}\ (2)$$

Por lo tanto (una vez más, regla 4), existe una constante b tal que:

$$\sim [(P(a) \rightarrow \sim P(b)) \rightarrow (\sim (\sim P(b) \rightarrow P(a)))] = \text{Ver}\ (3)$$

Esto, ahora bien, es imposible. Efectivamente, a las dos constantes a y b corresponde, por la función semántica, el elemento *único* u del universo. De ahí, la evaluación de P(a) es exactamente la misma que la de P(b): si [pV] es el subconjunto del universo que corresponde al predicado P, la evaluación equivale a preguntarse si el elemento u pertenece, sí o no, a [pV] (regla 1 de la evaluación de las fórmulas cerradas).

En la fórmula (3) podemos, pues, remplazar P(b) por P(a) sin modificar la evaluación del conjunto. La fórmula obtenida es:

$$\sim [(P(a) \rightarrow \sim P(a)) \rightarrow (\sim (\sim P(a) \rightarrow P(a)))]$$

Con todo, esta fórmula *nunca* es válida. Es fácil verlo al "reconstruirla". Pongámonos, por ejemplo, en el caso en que P(a) = Ver.

Regla 2: $\sim P(a) = Fal$
Regla 3: $(\sim P(a) \rightarrow P(a)) = Ver$
Regla 2: $\sim (\sim P(a) \rightarrow P(a)) = Fal$

Designemos (1) a este resultado. Por lo demás siempre tenemos, si P(a) = Ver,

Regla 2: $\sim P(a) = Fal$
Regla 3: $(P(a) \rightarrow \sim P(a)) = Fal$

A este resultado llamémoslo (2). De (1) y (2) extraemos, por aplicación de la regla 3:

$$[P(a) \rightarrow \sim P(a)) \rightarrow (\sim (\sim P(a) \rightarrow P(a))] = Ver$$

Y finalmente, por la regla 2:

$$\sim [(P(a) \rightarrow \sim P(a)) \rightarrow (\sim (\sim P(a) \rightarrow P(a))] = Fal$$

Dejemos por cuenta del lector la tarea de establecer, exactamente por el mismo método, que, si P(a) = Fal, entonces se desemboca en el mismo resultado. Quiere, pues, decir que la hipótesis inicial, relativa a la validez de la fórmula:

$$(Ex)(Ey) \sim [(P(x) \rightarrow \sim P(y)) \rightarrow (\sim (\sim P(y) \rightarrow P(x)))]$$

debe ser rechazada si el universo de interpretación no contiene más que un elemento: en un universo así, nunca es válida la fórmula. Esta prescribe, luego, un *tipo de multiplicidad* para la estructura: que posea por lo menos dos elementos. Es, por lo tanto, una fórmula matemática y su marcación axiomática debe de producir la teoría de la estructura de conjunto con por lo menos dos elementos, sin exigir por lo demás ninguna otra cosa de una estructura para que pueda ser modelo del sistema.

Hemos considerado la eficacia separadora de un axioma, que deslinda, entre las estructuras, un tipo de modelo. Podemos plantear el problema inverso, o sea, encontrar la signatura sintáctica –el axioma adecuado– de un tipo de estructura supuestamente dado, es decir, una teoría formal de la que esta estructura es modelo. Este es precisamente el problema de la *formalización* matemática, en cuyo caso la "donación" de los modelos es el estado histórico de las estructuras, la producción matemática real.

Retomemos el anterior ejemplo, pero invertido. Busquemos un axioma tal, que *sólo* sea válido para las estructuras cuyo universo no contiene más que un solo elemento. Está claro que, tratándose de una estructura de este tipo, la interpretación de los cuantificadores es sumamente particular: el (Ex) se confunde con el (Ux), puesto que la existencia de un elemento del universo perteneciente a un subconjunto dado da por supuesto que todos los elementos (no hay más que uno) le pertenecen. De allí la idea de tomar como axiomas de la matemática del Uno *todas* las fórmulas como

$$(Ex)P(x) \rightarrow (Ux)P(x)$$

en que P es una de las constantes predicativas admitidas en la sintaxis. Habrá, por consiguiente, tantos axiomas del Uno como constantes de este tipo haya.

Supongamos que una estructura sea modelo de nuestra teoría: todos los axiomas en cuestión son válidos. Distinguiremos dos casos:

1) (Ux)P(x) = Ver (en este caso, según la regla 3, el axioma es efectivamente válido). Esto quiere decir que para *toda* constante a, P(a) = Ver. En otras palabras (regla 1), *todos* los elementos del universo que corresponden a constantes individuales pertenecen al subconjunto [pV] que representa P. Diremos que P es *absoluto para la estructura.*

2) (Ux)P(x) = Fal. En este caso (regla 3) el axioma

sólo es válido si el antecedente de la implicación, o sea, (Ex)P(x), es igualmente evaluado como Fal, lo cual supone (regla 4) que no existe *ninguna* constante a tal que P(a) = Ver. Quiere decir que *ningún* elemento u del universo correspondiente a una constante pertenece a [pV]. Diremos que el predicado P es *vacío para la estructura.*

Como la nómina de nuestros axiomas agota todos los predicados del sistema, obtenemos el siguiente resultado: una estructura sólo es modelo de la teoría signada por los axiomas como

$$(Ex)P(x) \rightarrow (Ux)P(x)$$

si *todos* los predicados de la teoría son, o absolutos, o vacíos para la estructura.

De ello resulta que la existencia de diferentes constantes individuales en la sintaxis del sistema no ejerce influencia alguna sobre la evaluación de las fórmulas. Sean, en efecto, dos constantes, a y b, y un predicado, P. O bien P es absoluto, y entonces P(a) = P(b) = Ver, o bien P es vacío, y entonces P(a) = P(b) = Fal. Semánticamente, la teoría considerada es equivalente a la misma teoría en la que no disponemos más que de una sola constante.

De la misma manera muy bien podemos reducir la lista de los predicados únicamente a dos: el predicado "absoluto" y el predicado "vacío", ya que, si P y Q son absolutos, P(a) = Q(a) = Ver para la constante única a. Y si P y Q son vacíos, P(a) = Q(a) = Fal.

De ahí, el *modelo fundamental* de nuestra teoría, modelo que se impone hasta la evidencia para la teoría reducida a una sola constante individual y a dos constantes predicativas –una absoluta, vacía la otra– es éste:

– el universo es un conjunto de un solo elemento, y lo escribiremos $\{u\}$
– los subconjuntos son el conjunto vacío y el conjunto $\{u\}$ mismo.

A la constante a hacemos corresponder el elemento u. Al predicado vacío, el conjunto vacío. Y al predicado absoluto, el conjunto $\{u\}$. Y de este modo llegamos a

la conclusión de que un modelo es trivial.

Hemos, pues, demostrado el siguiente teorema (¡tan endeble!): una teoría cuyos axiomas son las fórmulas (Ex)P(x) → (Ux)P(x) es semánticamente equivalente a una teoría que admite para modelo una estructura cuyo universo no contiene más que un solo elemento. Era, en términos generales, el resultado deseado.

Estos ejemplos bastan para mostrar en qué sentido *un modelo es el concepto –matemáticamente construible– del poder diferenciador de un sistema lógico-matemático.* La doble circunstancia de las matemáticas en este enunciado constituirá el sostén de mi desarrollo final.

9. La categoría de modelo y la experimentación matemática

La más clara lección de nuestro rodeo es que la construcción del concepto de modelo depende estrechamente, en todas sus sucesivas etapas, de la teoría (matemática) de los conjuntos. Desde este punto de vista, ya es inexacto decir que tal concepto relaciona al pensamiento formal con su exterior. En verdad, las marcas "fueras del sistema" no pueden desplegar un campo de interpretación para las del sistema a no ser dentro de una *envoltura matemática* que ordene previamente unas respecto de las otras. El estado de las "fuerzas productivas" matemáticas, no mencionado como tal en la interpretación, no deja de ser, con todo, lo que condiciona su cientificidad y asegura la unidad del plano donde la sintaxis formal puede entrar en relación con los campos "intuitivos". Los instrumentos de la correspondencia forman parte de una teoría matemática a la que se le pide la posibilidad de emplearla "ingenuamente". Se presupone, en efecto, que actúan de manera conceptual (matemática) palabras o marcas como conjunto, subconjunto, función, ϵ, reuniones, poder de un conjunto, conjunto vacío, etc. La semántica es en tal caso una relación *intramatemática* entre ciertos dispositi-

vos experimentales refinados (los sistemas formales) y ciertos productos matemáticos más "groseros", es decir, aceptados, tenidos por demostrados, sin haber sido sometidos a todas las exigencias de inscripción cuyo dispositivo ordena y regula la compulsión verificadora.

Pero ocurre, precisamente, que la puesta en correspondencia semántica no es *otra cosa* que esa verificación misma. Permite evaluar el tipo de rigor escriptural a que puede pretender el campo considerado. El control (técnico) del sistema formal permite inscribir una *prueba de deductibilidad* relativa a las demostraciones informales que constituyen sus diversos modelos.

La semántica es un protocolo experimental. No del todo, en el sentido en que los sistemas sean lo "formal" cuyos modelos configuran las realizaciones concretas, sino a la inversa, esto es, en el sentido en que los sistemas formales son el tiempo experimental, el encadenamiento *material* de la prueba, posterior al encadenamiento –conceptual– de las demostraciones.

No hemos de perder de vista, claro está, las tesis fundamentales de Lacan relativas a la materialidad del significante[1]: a la luz ellas, la célebre definición formulada por Bacherlad de los instrumentos científicos como "teorías materializadas" se aplica con todo derecho a esos dispositivos escripturales que son las sintaxis formalizadas, sintaxis que en realidad son *medios de producción matemáticos*, con el mismo título con que lo son, con respecto a la física, el tubo al vacío o el acelerador de partículas.

La necesidad técnica –acerca de la cual tanto hemos insistido– de un control efectivo de los procedimientos sintácticos y el carácter explícito de los criterios para la expresión correcta o para la deducción reflejan la función de verificación-rectificación atribuida a los sistemas formales; trátase de una materialidad "rígida", manipulable y abierta. Agreguemos que el parentesco, cada vez más evidente, entre la teoría de estos sistemas y la teoría de los autómatas o de las máquinas de calcular ilustra de un modo asombroso la vocación experimental de los formalis-

[1] Véase: Jacques Lacan. *Ecrits,* de manera especial "L'Instance de la lettre das l'incoscient" (pp. 493-528) y "Le séminaire sur "La lettre volée" " (pp. 11-60).

mos. Y además hay que comprender que la materialidad no comienza con las máquinas "propiamente dichas". Un sistema formal *es* una máquina matemática, una máquina *para* la producción matemática y se sitúa dentro de ésta.

No obstante, hay otro aspecto –esencial– de la definición de Bachelard. El instrumento científico, medio de encadenamiento de la prueba, es asimismo un *resultado* científico. Sin visión teórica no hay microscopio; sin ruptura con la ideología aristotélica de "plena naturaleza", no hay tubo al vacío. Etcétera. Añadamos: sin aritmética recursiva, nada de sistema formal; y sin teoría de los conjuntos, ni pensar en regla científica de uso, en protocolo experimental riguroso para tales sistemas; por lo tanto, nada, asimismo, de sistema.

Hemos mostrado, en efecto, que las operaciones semánticas requieren un material matemático, conjuntista no formalizado, pero fácilmente se podría mostrar que también el estudio de las propiedades sintácticas requiere fragmentos de la teoría de los números enteros y sobre todo –lo hemos mencionado al pasar– un uso constante del razonamiento por concurrencia sobre la longitud de las escrituras. He ahí regiones, entre otras, de la ciencia matemática *incorporadas* a los dispositivos materiales en que ésta se experimenta. Son incorporaciones que atestiguan el hecho de que los medios matemáticos de producción también son matemáticamente producidos, raíz misma de la "doble circunstancia" de las matemáticas en nuestra definición del concepto de modelo. Lejos de señalar un exterior del pensamiento formal, la teoría de los modelos da normas a una dimensión de la *inmanencia práctica* de las ciencias, proceso no sólo de producción de los conocimientos, sino también de reproducción de las condiciones de producción.

Dentro de la unidad de este proceso, la distinción entre sintaxis y semántica tiene la fragilidad de la distinción entre *existencia* y *uso* de un dispositivo experimental. Es una distinción que sólo posee valor cuando se menciona la incorporación, mediante el dispositivo, de regiones científicas que no se ven directamente atañidas a la prueba en la que figura el dispositivo, cual es por ejemplo el caso de

quien aguarda de los perfeccionamientos ópticos de un microscopio un adelanto decisivo en el conocimiento de los virus.

De la misma manera, la distinción pertinente entre semántica y sintaxis remite a la elección de la parte de las matemáticas admitida para que figure *en el metalenguaje.*

Y llamamos "metalenguaje" a todo lo que se le requiere al lenguaje corriente (no formalizado), inclusive la matemática "intuitiva", para que las operaciones sintácticas y semánticas puedan ser racionalmente explicadas y practicadas.

Desde este punto de vista y por lo que incumbe a lo fundamental, hay que decir: la sintaxis es una disciplina aritmética; la semántica, una disciplina conjuntista. Entendámonos: la teoría de los dispositivos de inscripción, concebidos como *objetos* matemáticos, toma lo esencial de sus conceptos de la aritmética recursiva, o de la aritmética de los ordinales trasfinitos. Estas aritméticas permiten ordenar y numerar inductivamente el *montaje* experimental, así como evaluar su fuerza, su complejidad, etc., mediante razonamientos que recaen sobre la estructura de las inscripciones autorizadas o rechazadas por el sistema. En cambio, la teoría de los *usos* del dispositivo, concebido como operaciones experimentales, trata de *clasificar* las regiones de la matemática-material(*), de la matemática por tratar en el dispositivo: se trata de las miras mismas del concepto de estructura, a su vez producido dentro de la teoría más general, la más envolvente de que podamos disponer, cual es la teoría de los conjuntos (u hoy por hoy la de las categorías[2]).

Este aspecto de las cosas ha sido parcialmente visto por Kreisel y Krivine en su libro *Elementos de lógica matemática* (1967), subtitulado, precisamente, "Teoría de los

* En francés, *matériau,* es decir, sustantivo, no adjetivo; por ejemplo, como se habla de los materiales de la construcción. *(N. del T.)*

[2] El concepto matemático de categoría es una refundición generalizadora del concepto de especie de estructura. Véase: G. Poitou, *Introduction à la théorie des catégories,* curso mimeografiado, capítulos 1 y 2.

modelos". Retomando la terminología (ideológica) relativa a los "fundamentos de las matemáticas", distinguen dos perspectivas:

– los "fundamentos semánticos conjuntistas", cuyas "nociones básicas son: los conjuntos, la relación de pertenencia (entre conjuntos) y las operaciones "lógicas" de reunión, complementación y proyección (de conjuntos)";
– Los "fundamentos combinatorios", cuyas "nociones básicas son las de *palabras* (serie finita de símbolos) de un alfabeto finito, de *función combinatoria* (cuyos argumentos y cuos valores son palabras) y de *prueba combinatoria* de identidades (entre dos funciones combinatorias).

Tanto en un caso como en el otro, los autores destacan la referencia matemática dominante en que se origina cada perspectiva: la semántica es realista, "acepta la terminología conjuntista en su cabal sentido y no la considera como una manera de hablar"; la combinatoria descansa en nociones (aritméticas) "bastante familiares, porque intervienen de un modo implícito en todas las matemáticas elementales".

Pero Kreisel y Krivine, al no poder terminar con la ideología unilateral de los "fundamentos", no captan la diferencia como momento de un proceso experimental único, en el que la combinatoria no es más que el montaje experimental para una verificación escriptural cuya semántica regula las formas prácticas. Se ven, pues, reducidos a dar su *opinión* sobre los méritos respectivos de cada enfoque, cuya separación es, justamente, la impotencia.

Sigue en pie el hecho de que para ellos el único soporte posible para pensar la diferencia-unidad del modelo y lo formal, de la semántica y la sintaxis, queda claramente designado: es la relación intramatemática entre un "material de base" aritmético y un material de base conjuntista.

De allí que el concepto de modelo articule esa diferencia, y hay que atenerse al hecho de que los resultados teóricos que le incumben *adhieren* a la práctica matemá-

tica y no autorizan la menor exportación, no sólo porque esos resultados atañen a experimentaciones matemáticas, sino también porque la regla de uso de la palabra "modelo" y los principios que consultan las demostraciones en la que ésta figura remiten a los sistemas conceptuales de las matemáticas.

Tal es, en efecto, el caso. Para un sistema del tipo del que me ha servido de ejemplo, el teorema fundamental de completitud dice que un sistema así es coherente si y solamente si posee un modelo (véase el Apéndice). Este teorema vincula un concepto sintáctico (la coherencia) a un concepto semántico (modelo). Dentro del proyecto de la epistemología de los modelos, se yerguen en el punto crucial de la *juntura* de lo "formal" y lo "concreto". Pero su demostración exige la posibilidad de ordenar bien *todas* las fórmulas correctas del sistema, lo cual equivale en el caso general, a utilizar un enunciado fortísimo de la teoría de los conjuntos: el axioma de elección. El teorema de completitud sólo tiene sentido, por lo tanto, en el espacio de trabajo de las matemáticas. En rigor es un teorema de la teoría de los conjuntos y hasta de *una* teoría de los conjuntos, como que con posterioridad a los trabajos de Cohen sabemos que el axioma de elección es independiente de los demás axiomas, de manera, pues, que es dable construir una teoría de los conjuntos en la que el axioma de elección sea explícitamente negado. Quiere decir que toda exportación fuera del campo propio de la experimentación matemática es ilegítima, al menos si se pretende conservar el rigor de las propiedades del concepto y no degradarlas en variantes de una noción ideológica.

De esta manera hemos establecido que la *categoría* filosófica de modelo es, tal cual funciona en el discurso del positivismo lógico, doblemente inadecuada.

Ante todo lo es por el hecho de pretender pensar la ciencia en general de acuerdo con una diferencia (sintaxis/semántica) que en sí misma no es más que una *recaída* ideológica de una diferencia regional intramatemática (entre aritmética recursiva y teoría de los conjuntos).

Y lo es, sobre todo, por el hecho de pretender revestir la ideología empirista con *palabras* que designan los mo-

mentos de un proceso matemático. En efecto, "lenguajes formales" y "hechos empíricos" quedan confrontados, dentro de su discurso, como dos regiones heterogéneas. Que los segundos sean eventualmente "modelos" de los primeros, es este un hecho que permite "pensar" la confrontación como relación. Pero sucede, precisamente, que en matemáticas el dispositivo formal es aquello gracias a lo cual, al advenir como modelo, una región matemática se ve *transformada*, probada, experimentada por lo que ataña al estatuto de su rigor o de su generalidad. Resulta inconcebible que semejante transformación sea la de cosa alguna distinta de lo que, siendo *ya* siempre matemático, es semánticamente asignable como susceptible de articularse con el dispositivo sintáctico. Justamente porque también él es teoría materializada, resultado matemático, puede el dispositivo formal entrar en el proceso de producción de los conocimientos matemáticos, y dentro de este proceso el concepto de modelo no designa un exterior por formalizar, sino un material matemático por experimentar.

El discurso de Carnap es, tal como el de Lévi-Strauss, una variante de la epistemología burguesa. En la combinación —que exhibe— de nociones empiristas relativas al "problema del conocimiento" con conceptos científicos tomados de la lógica matemática —combinación que define la *categoría* filosófica de modelo—, la ideología es dominante, y sojuzgada la ciencia.

10. La categoría de modelo y el tiempo histórico de la producción matemática

¿Vale decir que ningún empleo epistemológico de la palabra "modelo" es admisible? No, desde luego, si enfocamos la *historicidad* de las matemáticas justamente con la forma de su dialéctica experimental. La categoría de modelo sirve entonces para pensar el tiempo —particularísimo— de esa historia

Precisemos bien el alcance de tal desarrollo. Por supuesto que no pretendo extraer del concepto de modelo

una doctrina de la historia de las matemáticas. Muy por el contrario, esta doctrina sólo puede apropiarse de la categoría de modelo por lo mismo que *ya* ha gobernado de una manera implícita tanto la polémica contra los usos nacionales (ideológicos) del término como la lectura del concepto (científico).

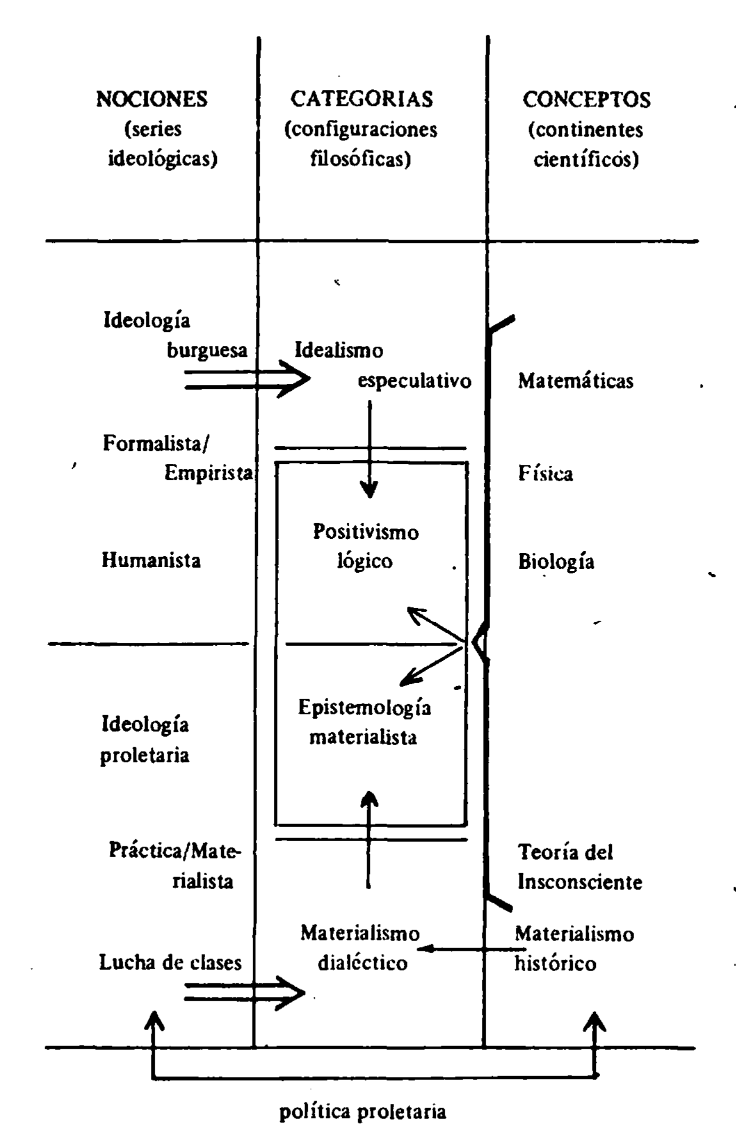
Lo único que digo es esto: si se asume dentro del marco del materialismo dialéctico una doctrina de la *producción histórica* de los conocimientos científicos, entonces uno tiene el derecho de reconocer en el concepto de modelo un *índice epistemológico*, desde que se entra a descifrar la dialéctica experimental de la producción matemática y se arranca, pues, a ésta de su estatuto idealista de conocimiento "puro", "formal", "*a priori*", etc.

En otras palabras, esclarecido por el materialismo dialéctico, el examen riguroso del concepto científico de modelo permite trazar una línea de deslinde entre dos *usos* categoriales (filosóficos) de este concepto: uno, positivista, que lo somete a la noción (ideológica) de la ciencia como representación de lo real; otro, materialista, que, al conciliarlo con la teoría de la historia de las ciencias –región específica del materialismo histórico–, hace indirectamente más fácil su integración eficaz en la ideología proletaria.

Por último, los empleos de la palabra "modelo" deben de hallarse distribuidos en un cuadro como el que se aprecia en la página siguiente y en cuyo centro se encuentra la lucha epistemológica que atañe, en rigor, al conjunto del "curso de filosofía" del que nuestro desarrollo es sólo una parte.

Tratándose de las acepciones de la palabra "modelo", se deberá enumerar cuatro de ellas:

1) *Noción:* el conocimiento es representación por modelos de lo real-empírico-dado.
2) *Concepto* (matemático): teoría de los modelos.
3) *Categoría, 1.* (positivista): lo real empírico suministra la semántica (los modelos) de la sintaxis que proponen las ciencias "puras". La experimentación es una evaluación-realización.


NOCIONES
(series
ideológicas)
CATEGORIAS
(configuraciones
filosóficas)
CONCEPTOS
(continentes
científicos)
Ideología
burguesa
Idealismo
especulativo
Matemáticas
Formalista/
Empirista
Física
Positivismo
lógico
Humanista
Biología
Ideología
proletaria
Epistemología
materialista
Práctica/Mate-
rialista
Teoría del
Insconsciente
Materialismo
dialéctico
Lucha de clases
Materialismo
histórico
política proletaria

4) *Categoría, 2* (materialista dialéctica): Todas las ciencias son experimentales. La matemática es un proceso de producción de los conocimientos doblemente articulado. "Modelo" designa la articulación conceptual, *por lo mismo* que se la relaciona con un dispositivo experimental particular: un sistema formal. "Sistema formal" designa, pues, la articulación experimental o inscripción. Hay envoltura de la articulación-2 por la articulación-1: la inteligencia de los montajes formales matemáticos se despliega en la práctica conceptual de las propias matemáticas.

Leyendo el cuadro, observaremos, por lo demás, que el efecto aguardado de la intervención epistemológica (materialista dialéctica) no consiste en ponerle fin a lo que define la filosofía: la práctica de una relación "imposible" entre la ciencia y la ideología. Lo que caracteriza a esta intervención es, en efecto, su relación reflexionada con *una* ciencia completamente particular, esto es, con el materialismo histórico, y conjuntamente su relación con la ideología proletaria.

En última instancia, la línea de deslinde filosófico tiene por referente práctico la lucha de clases dentro de la ideología, y esta lucha *opuesta* la apropiación-de-clase de la práctica científica.

Tal trasfondo general, que determina a la concepción marxista de la filosofía, no puede dejar de ser, en este caso, violentamente esquematizado. Me limitaré por ahora a unas pocas indicaciones, aun cuando riesgosas, sobre el justo uso epistemológico de la categoría de modelo.

En primer lugar la teoría de los modelos permite, como hemos mostrado, diferenciar matemáticamente a la lógica de las matemáticas. Regula un uso de los dispositivos formales que permite señalar las fórmulas que especifican la matematicidad de una estructura, cuales son las que fuerzan a ciertas estructuras a *no ser* modelos para el sistema. Con todo, esta diferenciación cae dentro de un viejo debate epistemológico (¿qué es lógico, "universal", y qué es matemático, regional?), al que diversifica y racionaliza.

Por otro lado, el principal uso de los modelos se aplica a la producción de pruebas de *coherencia relativa* y de

independencia.

Sea T una teoría formalizada definida por sus axiomas, y sea A una expresión bien formada del lenguaje formal adoptado. Designemos con (T + A0 a la teoría obtenida mediante la adjunción de A a los axiomas de T. Diremos que la fórmula A es *coherente con T* si, suponiendo coherente a T, (T + A) también lo es. ¿Cómo establecer semejantes resultados, cuya apariencia es puramente sintáctica?

El teorema fundamental de completitud nos garantiza que una teoría es coherente si y solamente si admite un modelo. La hipótesis atinente a la coherencia de T equivale a considerar esta teoría como la inscripción experimental de una estructura. Al "trabajar" a ésta, al desarrollar la supuesta coherencia de T, trataremos de producir un modelo de (T + A), es decir, una estructura que sea modelo de T y en la que, además, A sea válida. La coherencia de (T + A) queda entonces garantizada.

Por este lado demostró Gödel en 1939 la coherencia del axioma de elección y de la hipótesis del continuo con respecto a la teoría de los conjuntos sin axioma de elección ni hipótesis del continuo.

El interés de tal demostración, su *peso epistemológico*, estribaba, con todo, en el hecho de que el axioma de elección se hallaba discutido y hasta rechazado por un gran número de matemáticos y lógicos, quienes en cambio admitían el resto de la teoría. Esta sospecha tenía que ver con cierta visión de las matemáticas, una visión que daba privilegio a las operaciones "efectivas" y a la función fundadora de los números enteros. Dependía, por lo tanto, de una categoría (filosófica), cual es la categoría que separa lo que es matemático –o racional– y lo que no lo es.

La experimentación gödeliana, en la que el dispositivo formal, o sea, la axiomatización de la teoría de los conjuntos, desempeña un papel decisivo, *interviene*, pues, en una coyuntura epistemológica gracias a los medios de la ciencia. Prueba que el axioma de elección no es, desde el punto de vista de la coherencia, más "riesgoso" que el resto de la teoría de los conjuntos. Despeja la sospecha. Garantiza el uso. Y con ello transforma, no a la teoría,

sino al *estatuto* de ésta dentro del proceso histórico de producción de los conocimientos: el problema, por un momento obsesivo, de saber si tal o cual enunciado es independiente, para su demostración, del axioma "dudoso" pierde lo esencial de su interés.

Sin duda esta intervención llega siempre, debido a la minuciosidad misma de los montajes experimentales que exige, a destiempo. La práctica *ya* había ampliamente zanjado la cuestión en favor del axioma de elección. Pero ocurre, precisamente, que la intervención modifica la "elección" debido a la prueba a que la somete. Que salga confirmada de ésta, y queda establecido que era, antes que una "elección", una necesidad interna del proceso matemático. En física, por ejemplo, el *retraso de la prueba* (experimental) actúa retroactivamente sobre la *anticipación matemática*.

Recordemos ahora un ejemplo clásico. Llamemos GE a la teoría, supuestamente formalizada, de la geometría euclidiana en el espacio. Se la supone coherente; por lo tanto, admite un modelo, según el teorema de completitud. Para simplificar, consideraremos que este modelo es el espacio euclidiano, tal como tenemos su "intuición" escolar (pero son sólo nombres para estructuras complejas expresables en el lenguaje de la teoría de los conjuntos).

Sea ahora la teoría obtenida al remplazar dentro de la geometría euclidiana del plano (subteoría de GE) el célebre postulado de Euclides: "Por un punto exterior a una recta pasa una paralela a ésta y nada más que una" por el axioma (que implica la negación del precedente): "Por un punto exterior a una recta no pasa *ninguna* paralela a ésta". A esta nueva teoría la llamaremos GRP (geometría plana de Riemann).

Vamos a interpretar a GRP dentro de una estructura construible a partir del modelo de GE. En éste, cuyo universo es un espacio euclidiano, sea una *esfera* (euclidiana). Esta será el universo de nuestra subestructura.

– A las constantes de GRP que marcan los puntos (del plano) hacemos corresponder los puntos de la esfera. Pero convenimos en *identificar dos puntos diametral-*

mente opuestos; así, los "elementos" de nuestra estructura son *pares* de puntos.

– A las constantes de GRP que marcan las rectas (del plano) hacemos corresponder los grandes círculos de la esfera (el plano de los cuales pasa por el centro de la esfera).
– La relación entre rectas, o sea, "tener un punto común", se interpreta sin cambio.

Fácilmente se verifica que esta estructura es modelo para los axiomas "normales" de GRP; por ejemplo, el axioma (común a GRP y GE) de que "por dos puntos pasa una recta y solamente una" se interpreta así: "por dos puntos diferentes, es decir, no diametralmente opuestos, de la esfera pasa un gran círculo y solamente uno", lo cual es cierto en todo modelo *de GE* (es un teorema de GE, o, mejor dicho, su interpretación).

Además comprobamos que el axioma que caracteriza a GRP (la inexistencia de las paralelas) es válido para esa estructura, puesto que dos grandes círculos de una esfera *siempre* se cortan.

Por lo tanto, si GE admite nuestro modelo, podemos construir un modelo para GRP, y de este dispositivo resulta que la coherencia de GRP está garantizada por la de GE.

Y de ello resulta asimismo que el famoso postulado de Euclides es independiente de los demás axiomas de GE. En efecto, si se lo pudiera deducir de éstos, todo modelo de (GE – A) –inscripción formal de la geometría euclidiana menos el postulado– sería *también* un modelo de GE, puesto que la deducción conserva validez. Pero nuestro modelo de GRP *es* un modelo de (GE – A), pues los axiomas distintos del postulado de Euclides se conservan en GRP, y por consiguiente todos ellos son válidos para la estructura-esfera. Ocurre, no obstante, que esta estructura no es por cierto un modelo de GE, puesto que la *negación* del postulado es válida en ella. Y de ello resulta que no es dable esperar deducir este postulado (no válido para una estructura) de los demás axiomas (válidos para esta estructura).

De este modo, al producir un modelo euclidiano de la

geometría de Riemann, Poincaré apuntalaba retrospectivamente el avance de las geometrías "nuevas" con conceptos, con los conceptos de la geometría clásica, cuya práctica secular parecía excluir toda sospecha de incoherencia.

E igualmente de este modo ese modelo transformaba retrospectivamente, por la prueba de independencia que administraba, el estatuto de los vanos esfuerzos desplegables desde hacía siglos para demostrar el postulado de Euclides. Fracaso necesario, no de circunstancia. Imposibilidad, no impotencia. A un mismo tiempo, el modelo pone fin a la práctica que juzga.

Ello nos conduce al verdadero alcance de la categoría de modelo.

Suponiendo asumida una configuración matemática inscrita en la historia de esta ciencia, hacerla aparecer como modelo de un sistema formal, es decir, tratarla mediante este mecanismo, produce el efecto principal de *ubicar* su particularidad, de exportarla –fuera de las ilusiones inmediatas de su producción singular– a un espacio matemático más general, cual es el *de los* modelos del sistema: el dispositivo experimental es una encrucijada de prácticas.

Tales operaciones de desplazamiento pueden ser históricamente decisivas. En materia de grupo, a comienzos del siglo XIX casi no se conoce otra cosa que el cálculo sobre las sustituciones. El progresivo deslinde de los axiomas de la estructura de grupo resulta de manipulaciones escripturales que hacen aparecer los "grupos de sustituciones" como modelos entre otros. Ya sabemos qué impulso iba a dar esta generalización al álgebra a lo largo de todo el siglo.

Sin embargo, el verdadero problema planteado por este impulso consiste, como me lo hacía observar un matemático, en que la generalización de la que resulta es sólo aparente; se sabe muy bien, en efecto, que *todo* grupo es isomorfo a un grupo de sustituciones. Y es que el formalismo resulta ser la prueba retrospectiva del concepto. Gobierna el tiempo de la prueba, no el de la intrincación demostrativa. La ubicación que lleva a cabo bajo la jurisdicción del concepto de modelo *reajusta los conceptos tratados respecto de sus propios poderes implícitos.* Idéntico y desplazado, el concepto de grupo de sustituciones

ha atravesado la experimentación cuyo montaje específico era la teoría formal de los grupos cualesquiera. Así hemos visto *verificada* su importancia –ya destacada en su predominancia práctica a comienzos del siglo XIX– y *rectificado* el tipo de generalidad a que podía pretender.

Este uso de la palabra "modelo" libera, a mi modo de ver, una categoría epistemológica fecunda. Propongo llamar *modelo*, dentro del proceso histórico de una ciencia, al estatuto que asigna retrospectivamente a sus primeras instancias prácticas su transformación experimental mediante un dispositivo formal definido.

A la inversa, la historicidad conceptual, es decir, el valor "productor" del formalismo, le viene tanto de su dependencia teórica a título de instrumento como de lo que tiene de los modelos: le viene del hecho de incorporarse doblemente a las condiciones de producción y de reproducción de los conocimientos. Tal es la *garantía práctica* de los montajes formales.

La categoría de modelo ha de designar, así, la causalidad retroactiva del formalismo sobre su propia historia científica, que es la historia conjunta de un objeto y de un uso. Y la historicidad del formalismo será la inteligibilidad anticipadora de aquello a lo que éste constituye retrospectivamente como su modelo.

El problema no es ni puede ser el de las relaciones representativas del modelo con lo concreto, o de la forma con los modelos. El problema es el de la *historia de la formalización*. "Modelo" designa la red entrecruzada de las retracciones y anticipaciones que tejen esta historia, o sea, lo que se ha designado[1], en cuanto a la anticipación, como corte, y como refundición en cuanto a retroacción.

[1] En: F. Regnault y M. Pécheux, "La 'coupure épistémologique' ", *Cours de philosophie pour scientifiques*, fascículo III, Maspero, París.

APENDICE

1: El propósito

Mi intención consiste en proporcionar algunas indicaciones sobre el teorema de completitud, especialmente en lo que atañe a las teorías puramente lógicas construidas en el lenguaje de mi ejemplo fundamental. Nuevamente deberemos dirigirnos, así pues, al desplegable.

Estas observaciones, además de someter al lector al *vaivén* característico de los métodós semánticos y al razonamiento sintáctico tipo (recurrencia sobre la longitud de las escrituras), tienen el mérito de legitimar el ejemplo en cuestión. He aquí, en efecto, una forma del teorema: todo teorema, o axioma del sistema, es válido para toda estructura; a la inversa, toda fórmula válida para toda estructura es un axioma o un teorema del sistema.

Este sistema permite, pues, deducir todas las fórmulas puramente lógicas expresables por medio de su stock de marcas, sin que importe la estructura modelo para tal sistema. Esta equivalencia semántica-sintáctica nos asegura que nuestro dispositivo es una lógica formal completa (en este nivel, que sólo contiene predicados de un solo argumento).

Se trata no tanto de demostrar de manera cabal el teorema, ni de mencionar los métodos más eficaces, como de recorrer ciertos procedimientos usuales de acuerdo con una cadencia deliberadamente lenta o acelerada. En principio basta con un poco de atención; nada es mayormente exigible. Y de paso dejaremos por cuenta del lector, a título de ejercicio, algunos "fines de prueba".

2: Descripción del dispositivo SP

A este sistema lo llamaremos SP (sistema predicativo). El stock de marcas y reglas de formación son los de nuestro ejemplo (véase el desplegable). Los esquemas de axiomas son éstos (salvo precisión en contrario, A y B son expresiones cualesquiera bien formadas):.

Ax 1:

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

Ax 2:

$$[A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow D)]$$

Ax 3:

$$A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$$

Ax 4:

$$(A \rightarrow \sim A) \rightarrow \sim A$$

Ax 5:

$$\sim\sim A \rightarrow A$$

Ax 6:

(Ux)A → A(f/x), en que x es libre en A y en que f es, ora una constante, ora una variable no ligada en una parte de A en que x es libre.

Ax 7:

(Ux) (A → B) [A → (Ux)B], si x no es libre en A.

No planteamos el problema de saber si estos axiomas son independientes. En rigor, no lo son: los axiomas 3 y 4 se deducen de los axiomas 1, 2 y 5. Pero nuestra elección simplifica las demostraciones.

Podríamos asombrarnos de que ninguno de estos axio-

mas mencione el cuantificador existencial. Lo que ocurre es que éste es definible a partir de lo universal y de la negación. La aseveración "existe x poseedor de la propiedad P" equivale (semánticamente) a la aseveración "es falso que todo x sea marcable por no-P". Consideraremos, por lo tanto, que (Ex)A no es más que una escritura abreviada para ~(Ux)~A. En adelante consideraremos que toda expresión cuantificada contiene exclusivamente cuantificadores universales.

Las reglas de deducción de SP son las ya mencionadas: regla de separación y regla de generalización. El sistema queda así completamente descrito (montado).

3: Todo teorema de SP es puramente lógico

Nuestra intención es establecer que toda fórmula deducible en SP es válida para toda estructura. Para ello basta con verificar que los axiomas lo son y que las reglas de deducción conservan validez. Convendremos en escribir "L-válida" (lógicamente válida) la propiedad de ser válida para toda estructura.

Por lo que concierne a los axiomas, dejamos parcialmente el trabajo por cuenta de los lectores. Ya he mostrado que el esquema A → (B → A) es siempre válido. El método es el mismo para los axiomas 2, 3, 4 y 5 (empleo repetido de las reglas semánticas 2 y 3). Respecto del axioma 6, veremos que es ciertamente L-válido según la regla 5.

Tratemos el caso del axioma 7. Si no es L-válido, entonces existe una estructura tal que una instancia cerrada de este axioma adquiere el valor Fal. El hecho de que A no contenga la variable libre x se escribe:

$$(Ux)\,(A' \rightarrow B') \rightarrow [A' \rightarrow (Ux)B'] = \text{Fal} \quad (1)$$

en que A' es una instancia cerrada de A y B' es una fórmula cuya única variable libre es x.

La regla 3 exige, para que (1) sea verificada:

$$(Ux)\ (A' \to B') = Ver$$

o sea, para toda constante a (regla 5):

$$(A' \to B'(a/x)) = Ver \quad (2)$$

La regla 3 exige que *simultáneamente*

$$(A' \to (Ux)B' = Fal$$

o sea
regla (3) $\quad A' = Ver \qquad (3)$
e (ídem) $\quad (Ux)B' = Fal$

lo cual quiere decir (regla 5) que por lo menos para una constante a

$$B'(a/x) = Fal \quad (4)$$

Si las igualdades (3) y (4) son satisfechas, (2) no puede serlo. La hipótesis debe ser rechazada, y nuestro axioma es válido.

Por lo que compete a las reglas de deducción de SP, ya hemos mostrado que conservan validez.

Tenemos, pues, la seguridad de que, partiendo de axiomas válidos para toda estructura, deduciremos exclusivamente fórmulas válidas para toda estructura. Nuestro sistema SP no contiene deducción matemática alguna: no experimenta las diferencias estructurales. Es una máquina lógica.

Falta establecer que esta máquina agota el campo lógico expresable mediante sus recursos de inscripción. En otras palabras, que toda *fórmula* L-válida es por cierto deducible en SP. Es un punto mucho más delicado y exige algunos rodeos.

4: Teorema de la deducción

En la práctica matemática informal a menudo se nece-

sita, para establecer un teorema, una condición *suplementaria* con respecto a la generalidad estructural en la que se trabaja. Es el famoso uso escolar de las "hipótesis": si supongo el enunciado A, entonces puedo demostrar el enunciado B.

Aparentemente esto se traduce en nuestro lenguaje lógico mediante la fórmula A → B. Sólo aparentemente. En efecto, la suposición no sitio sitio ninguno en un sistema formal. En rigor, (A → B) significa: si he *deducido* A y (A → B), entonces puedo deducir B. Es el sentido mismo de la regla de separación. Pero si en SP no puedo deducir A, entonces la deducción de (A → B) no dice nada en cuanto a la deductibilidad de B. ¿De qué modo, pues, traducir la idea de que la hipótesis A permite sacar alguna conclusión respecto de B?

Vamos a mostrar que nuestro sistema es apto para inscribir este problema.

En el fondo, suponer que A es verdadera equivale a sumarla a los axiomas. Sea (SP + A) el sistema obtenido por adjunción de la "hipótesis" A a los axiomas de SP. Para simplificar no consideraremos más que fórmulas A cerradas. Luego, tenemos el siguiente resultado, un resultado que gobierna, en rigor, la eficacia deductiva del dispositivo:

Teorema de la deducción: Si la fórmula B es deducible en el sistema (SP + A), y la fórmula (A → B) es deducible en el sistema SP.

Consideremos una deducción cualquiera en el sistema (SP + A). Es una serie finita de fórmulas, que numeraremos (dentro del orden deductivo) de esta manera: B1, B2, B3... Bn. Vamos a razonar por recurrencia para establecer que (A → Bn) es un teorema de SP (sin el axioma A).

Examinaremos ante todo el caso de B1, primera fórmula de la deducción en (SP + A). Toda deducción comienza por un axioma: B1 es, por lo tanto, o un axioma de SP, o el axioma suplementario A.

– Si B1 es un axioma de SP, tenemos la siguiente deducción en *SP:*

B1	(axioma por hipótesis)
B1 → (A→B1)	(axioma 1)

B1 A→B1) (separación)

– Si B1 es el axioma suplementario A, dejamos por cuenta del lector la tarea de verificar que la serie siguiente es una deducción de SP:

$A \to [(C \to A) \to A]$
$[A \to [(C \to A) \to A]] \to [[A \to (C \to A)] \to (A \to A)$ (Ax.2)
$[A \to (C \to A)] \to (A \to A)$
$A \to (C \to A)$
$A \to A$
$A \to B1$

Así, (A → B1) es siempre deducible en SP.

Formulemos ahora la *hipótesis de recurrencia*. Supongamos que para toda fórmula Bi que preceda a Bn en una deducción de (SP + A) la fórmula (A → Bi) es deducible en SP. Vamos a mostrar que entonces (A → Bn) es igualmente deducible en SP.

En (SP + A) podremos producir Bn de tres maneras:

a) Bn es un axioma de(SP + A); por lo tanto, es un axioma de SP, o es el axioma A. En este caso el razonamiento recién aplicado a Bi muestra que (A → Bn) es deducible en SP.

b) Bn es producida por la regla de separación. En este caso existen fórmulas (Bi → Bn) y Bi que preceden a Bn en la deducción (en el sistema (SP + A)). Entonces tenemos en SP la siguiente deducción:

A → (Bi → Bn) según la hipótesis de recurrencia.
[A → (Bi → Bn)] → [(A → Bi) → (A → Bn)] (axioma 2)
(A → Bi) → (A → Bn) (separación)
(A → Bi) (hipótesis de recurrencia)
(A → Bn) (separación)

c) Bn es producida por la regla de generalización. Existe entonces Bi que precede a Bn en la deducción, con Bn escribiéndose (Ux)Bi. Entonces tenemos la siguiente deducción en SP:

A → Bi, por la hipótesis de recurrencia
(Ux) (A → Bi) (regla de generalización)
(Ux) (A → Bi) → [A → (Ux)Bi] (axioma 7)

Y es seguramente aplicable, ya que, siendo A una fórmula cerrada, x no es libre en A.

A → (Ux)Bi (separación)
A → Bn (escritura de Bn)

Juntemos nuestros resultados. Dada una deducción en el sistema (SP + A), su primera fórmula, B1, es tal que (A → B1) es un teorema de SP.

Y si las fórmulas que preceden a Bn poseen esta propiedad, entonces Bn también la tiene.

Como toda deducción es finita, un teorema de (SP + A) se halla siempre en la fila n (finita) en una deducción. El uso metateórico, informal, del esquema de razonamiento por recurrencia nos autoriza a sacar esta conclusión:

Si la fórmula B es deducible en el sistema (SP + A), en que A es una fórmula cerrada, (A → B) es deducible en SP.

5: Coherencia relativa de ciertas extensiones de SP

Supongamos que la fórmula cerrada ~ A *no sea* deducible en SP. Agreguemos la fórmula A a los axiomas: obtenemos una nueva teoría, (SP + A). Vamos a mostrar que esta teoría es *coherente*.

Recordemos que una teoría es coherente si existe por lo menos una fórmula A que no pueda ser deducida en la teoría. Por lo tanto, si (SP + A) es incoherente, podemos deducir la fórmula que fuere, particularmente la fórmula ~ A.

Ahora bien, si ~ A es deducible en (SP + A), el teorema de la deducción nos garantiza que (A → ~ A) es deduci-

ble en SP. Pero

$$(A \rightarrow \sim A) \rightarrow \sim A$$

es un axioma de SP (axioma 4). Por separación, $\sim A$ sería, pues, deducible en SP. Como hemos supuesto, justamente, que no lo es, la hipótesis de la incoherencia de (SP+A) debe ser rechazada.

Si la negación de una fórmula cerrada A de SP no es un teorema de SP, entonces el *sistema* (SP + A) es coherente.

6: Alcance del teorema de completitud

Si logramos *demostrar* el *teorema* de completitud, o sea, que toda teoría consistente admite un modelo, tendríamos la *seguridad* de que nuestro sistema SP es una lógica deductiva cabal; dicho de otra manera, tendríamos la seguridad de que toda fórmula cerrada válida en toda estructura (universalidad semántica) es un teorema del sistema.

En *efecto*, sea A una fórmula cerrada L-válida. $\sim\sim A$ también lo es (regla semántica 2). Si A no es deducible en SP, $\sim\sim A$ tampoco lo es. Efectivamente, si $\sim\sim A$ es deducible,

$$\begin{array}{ll} \sim\sim A \rightarrow A & \text{(axioma 5)} \\ \underline{\sim\sim A \qquad\quad} & \\ \qquad A & \text{(separación)} \end{array}$$

es una deducción de SP, y A es un teorema, contrariamente a la hipótesis. Pero si $\sim\sim A$ no es *deducible* en SP, entonces la teoría

$$(SP + \sim A)$$

es coherente (teorema del acápite precedente). Por lo tanto, admite un *modelo* si el teorema de completitud es

verdadero. En este modelo, $\sim$ A, axioma de la teoría (SP + $\sim$ A) es evidentemente válido (definición del modelo). Como suponemos a A L-válida, es especialmente válida para la estructura que es ese modelo. Pero dos fórmulas A y $\sim$ A no pueden ser simultáneamente válidas dentro de la misma estructura: nuestra hipótesis inicial debe ser rechazada. Si A es L-válida, entonces es, por cierto, un teorema de SP.

Así, bajo la condición del teorema de completitud, toda fórmula puramente lógica de SP es deducible en SP.

Observemos de paso que este resultado, el precedente y el teorema de la deducción valen para toda teoría que contenga los axiomas de SP. Por lo tanto, de modo particular, para las teorías matemáticas obtenidas al agregar a SP axiomas no puramente lógicos. O sea, para dispositivos experimentales matemáticos, cuya lógica subyacente es articulada por SP.

7: El lema de Lindenbaum

Un problema sintáctico interesante relativo a los poderes experimentales de una teoría formalizada es el de su *saturación*. Efectivamente, ¿permite el dispositivo clasificar *todas* las fórmulas cerradas en demostrables y refutables (una fórmula es refutable si su negación es demostrable)? Si tal es el caso, se dice que la teoría está *saturada*. Dada la fórmula cerrada A, o bien A es un teorema, o bien no-A es un teorema.

Destaquemos inmediatamente que, para un sistema puramente lógico como el nuestro, la *saturación* (sintáctica) entraña la *completitud* (semántica). En efecto, si una fórmula A es L-válida y no es un teorema, $\sim$ A es un teorema (saturación). Pero entonces $\sim$ A es L-válida, puesto que nuestro sistema es puramente lógico. Como resulta imposible que A y $\sim$ A sean por igual L-válidas, nuestra hipótesis inicial es insostenible: hay que admitir que toda fórmula L-válida es un teorema. Por consiguiente, el sistema es cabal para las fórmulas puramente lógicas.

Por regla general, para una teoría matemática indeterminada el problema de saber si está saturada no es sencillo. Un resultado famoso en este sentido es el de Gödel para un dispositivo formal de la aritmética; este dispositivo *no está* saturado. Gödel construye explícitamente en él una fórmula cerrada *indecidible* (ni ella ni su negación son deducibles, al menos si el sistema es coherente). No obstante se trata de una fórmula evaluable en el modelo "normal" del dispositivo: los números enteros naturales dotados de sus operaciones usuales. En este modelo es válida la negación de la fórmula indecidible. Vale decir que el sistema formal de la aritmética es semánticamente incompleto para su modelo normal.

Y sin embargo vamos a establecer el siguiente resultado general: *toda teoría coherente admite una extensión saturada* (Lindenbaum).

Una teoría T será simplemente un sistema que admite todos los axiomas de SP, más –eventualmente– otros axiomas.

En este caso una extensión de una teoría T es una teoría T' tal, que todos los teoremas de T son también teoremas de T'. T' se expresa con el mismo lenguaje que T y tiene, por lo tanto, las mismas expresiones bien formadas. El lema de Lindenbaum desempeña un papel decisivo en teoría de los modelos. En la elemental versión que damos de él, descansa, de manera esencial, en la finitud de las series de marcas (de las fórmulas) y en la idea de que el stock de marcas de que disponemos es enumerable.

Suponemos, en efecto, que hemos podido alinear y numerar *todas* las fórmulas cerradas de T. Sea F1, F2. . ., Fn este ordenamiento. Como cada fórmula Fn es una serie finita de marcas, y como también éstas son numerables (enumerables), la suposición queda justificada.

Entonces examinamos las fórmulas, una tras otra, para definir por recurrencia una *serie de teorías.*

– La teoría T0 es la teoría T misma.

– Si ~ F1 es deducible en T0, T1 es la teoría T0;
si ~ F1 no es deducible en T0, T1 es la teoría (T0 + F1).

– Si $\sim F2$ es deducible en T1, T2 es la teoría T1;
si $\sim F2$ no es deducible en T1, T2 es la teoría (T1 + F2).

. . . .

– Si $\sim F_{n+1}$ es deducible en T_n, T_{n+1} es la teoría T_n;
si $\sim F_{n+1}$ no es deducible en T_n, T_{n+1} es la teoría $(T_n + F_{n+1})$.

. . . .

El lector se valdrá del resultado de nuestro acápite 5 para mostrar que, si la teoría T_n es coherente, la teoría T_{n+1}, también lo es. Por lo tanto, si TO, es decir, T, es coherente, la recurrencia nos permite sacar la conclusión de que todas las teorías T_n de la serie son coherentes.

Consideremos la teoría T' obtenida al tomar todos los axiomas de todas las teorías TO, T1. . . , T_n. . . También ella es coherente, si T es coherente, como podemos verificarlo. Por otra parte, contiene todos los axiomas (entre otros) de TO y consiguientemente todos sus teoremas. Es, pues, una extensión de T. Falta establecer su saturación.

Sea F_n una fórmula cualquiera, dada con su fila n en la numeración. O bien $\sim F_n$ se deduce de los axiomas de la teoría T_{n-1}, y es entonces un teorema de T' que contiene todos estos axiomas, o bien no se deduce de ellos. Pero entonces la regla de construcción de la serie de las teorías muestra que T_n es $(T_{n-1} + F_n)$. F_n es, por lo tanto, un axioma de T_n y, de ahí, de T'. Por consiguiente, sea F_n lo que fuere, o $\sim F_n$ o F_n son deducibles en T', que es una teoría saturada.

Se observará que este teorema es propiamente semántico en la medida en que no es efectivo. Es del todo probable no saber decidir por anticipado, mediante un procedimiento mecánico invariable o un montaje escriptural, si en la etapa de fila n la fórmula $\sim F_{n+1}$ es o no es deducible en la teoría T_n. Pero si siempre se lo sabe. entonces quiere decir que la teoría T_n es *decidible*; se trata de una propiedad rotunda, pero muy rara, por desgracia, para un dispositivo formal. Así, SP es decidible, pero la teoría que admite relaciones binarias –expresiones como R(x, y) –, con los mismos esquemas de axiomas que SP, ya no lo es.

8: El teorema de completitud

La idea que gobierna la demostración del teorema de completitud consiste en tomar por modelo de una teoría, a la que se supone coherente, escrituras de la propia teoría. Este es un procedimiento notable; en él el montaje formal articula dos funciones simultáneas: la inscripción de los teoremas y el tratamiento semántico de algunas de sus propias piezas.

Observemos ante todo que las marcas sintácticas siempre pueden ser también tratadas como un material semántico en la medida en que sus listas forman *conjuntos* de marcas.

El universo del modelo que vamos a construir es, en rigor, una extensión de un conjunto de marcas particulares, esto es, el conjunto de las constantes individuales de la teoría considerada.

Se advertirá que es, en efecto, posible agregar arbitrariamente nuevas marcas de constantes a un sistema matemático-lógico; esta extensión es coherente si la teoría también lo es, como fácilmente se lo verifica (véase, por ejemplo, en: E. Mendelson, *Introduction to mathematical logic*, p. 55).

De esta manera, a constantes vamos a asignarles la función de ser los *elementos* de un universo. Los predicados se interpretan entonces del siguiente modo: al predicado P se le hace corresponder el subconjunto compuesto por marcas a tal que P(a) sea un teorema de la teoría considerada. Advirtamos que, si nuestro sistema admitiese relaciones binarias (por ejemplo), haríamos corresponder a una relación R los pares de constantes (a, b) tales que R(a, b) sea deducible. El procedimiento es general y no depende de la restricción de nuestro ejemplo a los predicados de un solo argumento.

Ahí se anudan las dos funciones: P(a) es *válida* si y solamente si P(a) es *deducible*. Este punto de saturación entre sintaxis y semántica gobierna el desarrollo de la

prueba, así como algunos de sus efectos paradójicos. Insistiremos a este respecto.

Ahora enumeremos, como precedentemente, no todas las fórmulas de T, sino todas las fórmulas que tienen una sola variable libre. Sea esta enumeración F1, F2. . ., Fn. . . A cada una de estas fórmulas le *asociamos* una constante individual del modelo considerado.

Para la numeración tomamos algunas precauciones relativas a la diferencia en las marcas, utilizando libremente la posibilidad de agregar nuevas constantes.

El propósito fundamental de tales precauciones es:

1º) evitar que la constante asociada a Fn ya figure, así sea en la escritura de Fn o en la de las fórmulas Fn-k que la preceden en la lista;
2º) evitar que la constante asociada a Fn figure en los axiomas *matemáticos* (distintos de los de SP) que la teoría contiene de manera eventual.

Consideremos ahora todas las fórmulas de S_n del tipo de

$$S_n: \sim (Ux)\ F_n \rightarrow \sim F_n\ (b/x)$$

en que x es la variable libre de F_n y b es la constante asociada a F_n.

Vamos a construir, con la ayuda de las fórmulas S_n, una serie infinita de extensiones de la teoría inicial T, para lo cual procederemos de la siguiente manera:

TO = T
T1 = T + S1
T2 = T + S1 + S2
....
$T_n = T_{n-1} + S_n$, o sea, $T + S1 + \cdots + S_n$
....

Estas teorías añaden, pues, a T axiomas (las fórmulas S_n) en los que se marca una conexión –interna del montaje– entre las fórmulas de una sola variable libre y constantes individuales, conexión garantizada por la nume-

ración serial de las piezas del montaje. Es, en suma, un dispositivo controlado por una rotulación especial de las fórmulas de una variable libre.

El valor principal de este control se aplica al siguiente resultado:

Si T es coherente, toda teoría T_n también lo es.

Una vez más, vamos a razonar por una especie de recurrencia descendente, combinada con un razonamiento por el absurdo: vamos a mostrar que si T_n es incoherente, T_{n-1} también lo es y por lo tanto, finalmente, TO (o sea, T).

El lector comenzará por volver a leer la demostración del teorema de la deducción (acápite 4 de este Apéndice). Se convencerá de que su resultado sólo supone que la teoría considerada comprende los axiomas de SP y de que no tiene otras reglas de deducción que la separación y la generalización. En otras palabras, dada una extensión matemático-lógica de SP, siempre es verdadero que si B es deducible en la teoría (T + A), en que A es una fórmula cerrada, (A → B) es deducible en la teoría de T.

Supongamos que T_n sea incoherente. Entonces podemos deducir cualquier fórmula; por ejemplo, $\sim S_n$. Pero T_n no es otra cosa que $(T_{n-1} + S_n)$. El teorema de la deducción nos permite, luego, afirmar que $(S_n \to \sim S_n)$ es un teorema de T_{n-1}.

Como T_{n-1} es una extensión de T –por lo tanto, de SP–, tenemos la deducción:

$\vdash (S_n \to \sim S_n) \to \sim S_n$	Axioma 4
$\vdash \sim S_n$	Separación

Así, remplazando S_n por su escritura completa, tenemos en T_{n-1} el teorema:

(1) $\vdash \sim [\sim (Ux)F_n \to \sim F_n (b/x)$

Admitiremos en este punto, sin demostrarlos, los dos siguientes esquemas de teoremas, deducibles, mediante el empleo único de la regla de separación, de los axiomas 1,

2 y 5 de SP (ejercicio eventual):

(2) $\vdash \sim (\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A$

(3) $\vdash \sim (\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow B$

Remplacemos a A por la fórmula $(Ux)F_n$, y a B por $F_n(B/x)$, siendo siempre b la constante asociada a la fórmula F_n. Tenemos entonces el siguiente teorema de SP (por lo tanto, de T_{n-1}, que es una extensión de SP), simple variante del anterior esquema (2):

(4) $\vdash \sim [\sim (Ux)F_n \rightarrow \sim F_n(b/x)] \rightarrow \sim (Ux)F_n$

Este teorema de T_{n-1} y el teorema (1), recién establecido, dan, por separación:

$$(A) \vdash \sim (Ux)F_n$$

Ahora, el esquema (3), con las mismas sustituciones, justifica (siempre en T_{n-1}):

$$\vdash \sim [\sim (Ux)F_n \sim F_n(b/x)] \rightarrow F_n(b/x)$$

Sea, también por separación:

$$(B) \vdash F_n(b/x)$$

Vamos a mostrar que (A) y (B), teoremas de T_{n-1}, implican la incoherencia de esta teoría.

Examinemos una deducción de (B) en T_{n-1}. Remplacemos en ésta, en todas partes, la constante b por una variable y *que no figura en ninguna de las fórmulas de la deducción.* Esta operación es siempre posible, puesto que la lista de las variables es infinita y toda deducción es finita. Pero por otra parte no altera el carácter deductivo de la serie. En efecto, los axiomas puramente lógicos se ven transformados por ella en otros axiomas lógicos, correspondientes al mismo esquema (verificación elemental). Los axiomas matemáticos permanecen al margen de toda consulta, ya que nuestras precauciones en la elección de las constantes asociadas garantizan que la constante b no

figura en ninguno de estos axiomas. Los axiomas S1, S2. . ., S_{n-1} tampoco tienen nada que ver, por la misma razón. En cuanto a las reglas de deducción, está claro que siempre actúan: la separación, porque la sustitución es uniforme; y la generalización, porque no atañe a la constante b ni toca la variable y, que, al no figurar en la deducción inicial, no se ve en parte alguna cuantificada.

Así obtenemos el siguiente resultado: si en T_{n-1} existe una deducción de $F_n(b/x)$, entonces también existe una de $F_n(y/x)$.

Por generalización obtenemos entonces en T_{n-1}:

$$(C) \vdash (Uy)F_n(y/x)$$

Pero también hemos demostrado:

$$(B) \vdash \sim (Ux)F_n$$

Y tenemos en T_{n-1} el siguiente fragmento deductivo:

$\vdash (Uy)F_n(y/x) \rightarrow F_n$ Axioma 6

(remplazo de y por x, que no es obligado en F_n)

$\vdash (Ux) [(Uy) F_n (y/x) \rightarrow F_n]$
$\vdash (Ux) [(Uy) F_n (y/x) \rightarrow F_n] \rightarrow [(Uy) F_n (y/x) \rightarrow (Ux) F_n]$

(Axioma 7: aplicable aquí, pues x no figura en $(Uy)F_n(y/x)$)

$\vdash (Uy)F_n(y/x) \rightarrow (Ux)F_n$ Separación

$\vdash (Ux)F_n$ Separación (por C)

Así, $(Ux)F_n$ es deducible en T_{n-1}; pero $\sim (Ux)F_n$ también lo es (véase nuestra anterior proposición (B)). De ello resulta que T_{n-1} es ciertamente incoherente. Tenemos en efecto, siendo A una fórmula cualquiera, el siguiente esquema deductivo:

$\vdash (Ux)F_n \to [\sim (Ux)F_n \to A]$ Axioma 3
$\vdash \sim (Ux)F_n \to A$ Separación
$\vdash A$ Separación

Como A es una fórmula cualquiera, queda bien claro que cualquier fórmula es un teorema de T_{n-1}, lo cual es la definición misma de la incoherencia.

Por lo tanto, si T_n es incoherente, T_{n-1} también lo es. Por "descenso" vemos inmediatamente que TO = T es incoherente. Y podemos afirmar que recíprocamente, si T es coherente, T_n también lo es, sea n lo que fuere.

Llamemos ahora TU a la teoría obtenida por adjunción a los axiomas de T de *todos* los enunciados del tipo de S_n, o, si se prefiere, a la teoría unión de todas las teorías T_n. Si T es coherente, TU también lo es. En efecto, supongamos que sea posible deducir A y ~A en TU. Estas dos deducciones son finitas y no utilizan más que un número finito de axiomas del tipo de S_n. Son por lo tanto, internas de una teoría T_n (la que contiene al axioma S_n de más alta fila utilizado en las deducciones de A y ~A). T_n, en que se deduce A y ~A, es entonces incoherente (razonamiento ya indicado y que retomamos más adelante), lo cual es, como hemos mostrado, imposible si T no lo es.

Ahora, según el lema de Lindenbaum, si T es coherente —por lo tanto, TU—, existe una extensión saturada de TU, o sea TU'; como TU es una extensión de T, TU' es una extensión saturada de T. Podemos trabajar en TU' con la estructura suturante considerada (P(a) válida si y solamente si P(a) deducible). Si esta estructura es modelo para TU', todos los axiomas de TU' son válidos, y por lo tanto lo son todos los de T, de la que TU' es una extensión.

Vamos a establecer directamente un resultado más rotundo. Una fórmula cerrada de TU' es un teorema si y solamente si es válida para TU; "ser un teorema" y "ser una fórmula válida en la estructura-suturante" son enunciados equivalentes.

La restricción a las fórmulas cerradas carece de importancia.

El lector mostrará, en efecto, que:

– Si F, en que x es libre, es válida,(Ux)F también lo es, y recíprocamente (utilizar la regla 5 y la definición de la validez).

– Si F, en que x es libre, es un teorema, (Ux)F también lo es (generalización), y recíprocamente (axioma 6).

Razonaremos por recurrencia sobre el *número de signos lógicos* que figuran en una fórmula cerrada. Por signos lógicos entendemos: (Ux), ~, →.

a) Si la fórmula no contiene *ninguna* marca de este tipo, entonces es de la forma P(*a*). La definición misma de nuestra estructura es que P(*a*) sólo es un teorema si P(a) es válida, y recíprocamente.

b) Formulamos la hipótesis de recurrencia: supongamos que todas las fórmulas cerradas que contengan menos de *n* signos lógicos sean teoremas si y solamente si son válidas para la estructura. Vamos a demostrar que lo mismo ocurre con respecto a una fórmula cerrada que contenga *n* signos lógicos.

c) Sea A una fórmula de este tipo. Puede escribirse: o ~B (B posee n–1 signos lógicos); o (B → C) (B y C tienen dos n–1 signos lógicos); o (Ux)B (teniendo B n–1 signos lógicos).

Primer caso: A se escribe ~B.

– Si ~B es válida, B no lo es. Según la hipótesis de recurrencia, B no es, por lo tanto, un teorema. Pero TU' está saturada. Por lo tanto, ~B es un teorema.

– Si ~B no es válida, B lo es. Por lo tanto, B es un teorema (hipótesis de recurrencia). Entonces, ~B no lo es. En efecto, TU' es supuestamente coherente (puesto que también a T se la supone ser). Ahora bien, si ~B y B fueran por igual teoremas, podríamos deducir en TU' cualquier fórmula C, y TU' sería incoherente. Recordemos, en efecto, que la serie

$$
\begin{array}{r}
B \to (\sim B \to C) \\
\sim B \to C \\
C
\end{array}
$$

sería entonces una deducción (ejercicio-generalización de una demostración que ya hemos hecho.

Observemos de paso la equivalencia para nuestro sistema SP de la definición "clásica" de la coherencia (no admitir a la vez un enunciado y su negación) y de la que hemos dado (no poder deducir lo que fuere).

Segundo caso: A se escribe (B → C).

– Si (B → C) no es válida, C = Fal y B = Ver (regla 3). La hipótesis de recurrencia impone que B sea un teorema y que C no lo sea. Pero la saturación de TU' impone: si C no es un teorema, ~ C lo es. En tales condiciones, (B → C) no es por cierto un teorema, pues si lo fuera, siéndolo B, C lo sería (regla de separación), y siéndolo también ~C, TU' sería incoherente.

– Si (B → C) es válida, entonces o bien C es válida y es por lo tanto un teorema, por la hipótesis de recurrencia, pero C → (B → C) es un axioma, y por separación (B → C) es un teorema; o bien C no es válida, pero entonces B tampoco lo es (regla 3). De ello resulta (hipótesis de recurrencia y saturación) que B es un teorema. Tenemos entonces la deducción:

$\sim B \to (\sim\sim B \to C)$	(axioma 3)
$(\sim\sim B \to C)$	(separación)

Admitiremos, sin más desarrollo, que en nuestra deducción ~~ B puede ser remplazado por B (esto implica diversas manipulaciones deductivas a partir de los axiomas 5, 2 y 1). Por lo tanto, (B → C) es un teorema.

Tercer caso: A se escribe (Ux)B

– Si (Ux)B no es un teorema, ~(Ux)B lo es (saturación). Pero TU' contiene todos los axiomas de TU, de la

que es una extensión, y por lo tanto contiene todas las fórmulas del tipo de

$$\sim(Ux)F_n \rightarrow \sim F_n(a/x),$$

en que F_n es una fórmula de una sola variable libre, y a es la constante "asociada" a F_n. Como (Ux)B es una fórmula cerrada, B no contiene más que la variable libre x. Entre los axiomas de TU' hay, pues, una fórmula:

$$\sim (Ux)B \rightarrow \sim B(b/x)$$

Por separación, ~B(b/x) revela ser un teorema de TU'. Por lo tanto B(b/x) no lo es (coherencia de TU'), y por consiguiente (hipótesis de recurrencia) B(b/x) no es válida. Resulta de ello que (Ux)B no podría ser válida (regla 5).

– Si (Ux)B es un teorema, cualquiera que sea la constante a, sabemos que (Ux)B → B(a/x) es un axioma (véase nuestro esquema de axioma 6) y que por lo tanto, por separación, B(a/x) es un teorema. La hipótesis de recurrencia garantiza entonces la validez de B(a/x) para todo a y, por lo tanto, la de (Ux)B (regla 5).

Finalmente:

1) Las fórmulas cerradas con cero signo lógico son deducibles en TU' si y solamente si son válidas (para la estructura-suturante).
2) Todas las fórmulas cerradas con menos de n signos lógicos se supone que son deducibles si y solamente si son válidas, en cuyo caso ocurre otro tanto con las fórmulas cerradas con n signos.

Por consiguiente (mediante uso informal del esquema de recurrencia sobre los números naturales), para las fórmulas cerradas de TU' deductibilidad y validez (dentro de la estructura en cuestión) son equivalentes. De modo especial, la estructura es modelo para TU' y, por lo tanto, modelo para T, de la que TU' es una extensión.

Las únicas hipótesis atinentes a T son su coherencia (que garantiza la de TU') y su lógica subyacente (nuestros axiomas para SP). Podemos, luego, extraer la siguiente

conclusión:

A) Toda teoría matemático-lógica coherente que es una extensión de SP admite un modelo (teorema de Henkin).

Y de aquí extraemos, como ya destacamos en el acápite 6:

B) El sistema SP permite deducir todas las fórmulas puramente lógicas cuya inscripción queda autorizada por su material de signos (teorema de Gödel).

Estos resultados constituyen la piedra angular de toda la lógica matemática. Agreguemos un resultado "paradójico": nuestro modelo es enumerable, ya que su universo está compuesto por una lista numerada de marcas. Por lo tanto:

C) Toda teoría matemático-lógica consistente que es una extensión de SP admite un modelo enumerable (teorema de Löwenheim-Skolem).

De esta manera, hasta una teoría formalizada que apunte a inscribir la estructura de campos matemáticos no numerables (como por ejemplo los puntos de una recta) admite asimismo modelos enumerables.

Vale decir que ningún dispositivo formal escapa a la necesidad de poder inscribir su propia finitud, o sea, la materialidad discreta de las marcas que despliegan en su seno el proceso de inscripción. Un montaje experimental es siempre, al mismo tiempo, experimentación del montaje.

Sintaxis

a) *Alfabeto*

– constantes individuales: a, b, c, a', b', c'. . .
– variables individuales: x, y, z, x', y', z'. . .
– constantes predicativas: P, Q, R, P', Q', R'. . .
– Conectadores lógicos: negación: ~; implicación→
– Cuantificadores: universal: U; existencial E.

b) *Reglas de formación*

– P(a), P(x), etc., son expresiones bien formadas:
– si A y B son expresiones bien formadas, ~A, (A → B) son expresiones bien formadas, y (Ux)A, (Ex)A son expresiones bien formadas (si x es libre en A y A es bien formada).

c) *Reglas de deducción*

Si A y B son expresiones bien formadas, y si el signo |–, que indica que la fórmula que sigue ya ha sido deducida, tenemos los siguientes esquemas deductivos:

Generalización $\dfrac{\vdash A}{\vdash (Ux)A}$ Separación $\dfrac{\vdash (A \rightarrow B) \quad \vdash A}{\vdash B}$

d) *Axiomas*, lógicos (válidos en toda estructura), y matemáticos (que caracterizan la teoría formal considerada).

d') *Ejemplo:* axiomas del sistema puramente lógico SP (véase el Apéndice).

Ax 1: A → (B → A)

Ax 2: [A → (C → D)] → [(A → C) → (A → D)]

Ax 3: A → (∼ A → B)

Ax 4: (A → ∼ A) → ∼ A

Ax 5: ∼ ∼ A → A

Ax 6: (Ux)A → A(f/x), en que x es libre en A y en que f es, o bien una constante, o bien una variable no ligada en una parte de A en que x es libre.

Ax 7: (Ux) (A → B) → [A → (Ux) B], si x no es libre en A.

e) *Algunas definiciones y escrituras*

– Una variable se llama *libre* en una expresión bien formada si no cae dentro del campo de un cuantificador. De otro modo, es *ligada*. Ej.: en la fórmula (Ex)(P(y) → Q(x)), y es libre, y x es ligada.

– Una fórmula es *cerrada* si no contiene ninguna variable libre. De otro modo, es *abierta*.

– A(f/x) designa la fórmula obtenida al remplazar en la fórmula A la variable libre x por la marca f (constante individual o variable).

– Si una fórmula A contiene las variables libres x, y, z. . ., una *instancia cerrada* de A es una fórmula del tipo de A(a/x)(b/y)(c/z). . ., en la que todas las variables libres de A son remplazadas por constantes.

Semántica

a) *Estructura*

– Un conjunto V, llamado universo, cuyos elementos se escriben u, v, w,. . . Tenemos, pues: u ∊ V.
– Una familia de subconjuntos, eventualmente vacíos, de V, que se escriben [pV], [qV], [rV]. . .
– Dos marcas: Ver y Fal.

b) *Interpretación en una estructura dada*

– Una función f que:
a cada constante individual del sistema (sintáctico) asigna un elemento del universo V. Tenemos, por ejemplo: f(a) = u;
a cada constante predicativa del sistema asigna un subconjunto de la familia que define la estructura. Por ejemplo: f(P) = [pV].

c) *Evaluación de las fórmulas cerradas para una estructura dada*

Regla 1: P(a)= Ver si y solamente si f(a) ∊ f(P) (por ejemplo, si u ∊ [pV]). Si no, P(a) = Fal.
Regla 2: ~A = Ver si y solamente si A = Fal. Si no, ~ A = Fal.
Regla 3: (A → B) = Fal si y solamente si A = Ver y B= Fal. En todos los demás casos, (A → B) = Ver.
Regla 4: (Ex)B = Ver si y solamente si existe por lo menos una constante individual a tal que A(a/x) = Ver Si no, (Ex)A=Fal

Regla 5: (Ux)A = Ver si y solamente si para toda constante individual a sabemos que A(a/x) = Ver. Si no, (Ux)A = Fal.

d) *Validez*

Una fórmula A de un sistema formal es *válida para una estructura* si para toda instancia cerrada de A, o sea, A', tenemos A' = Ver.

e) *Modelo*

Una estructura es modelo para un sistema formal si todos los axiomas de éste son válidos para la estructura.

Marca y carencia: a propósito del cero

por

Alain Badiou

La epistemología se aparta del dominio ideológico, en el que toda ciencia viene a hacer constar su reflejo, por lo mismo que excluye al operador institucional de él –la noción de Verdad– y procede conforme al concepto de un mecanismo de producción respecto del cual se aguarda que, por diferencia, la teoría de su estructura dé razón de su efecto.

¿Qué sucede con una epistemología de la lógica?

La representación de esta disciplina dentro de la red de los indicadores ideológicos nos la muestra extraña a lo real, discurso que presupone, no la construcción de un objeto, sino la situación de la Verdad. Es lo que Frege enuncia violentamente cuando asimila una proposición a un nombre propio cuya referencia –la denotación– es, o lo Verdadero, o lo Falso. De ello resulta que la lógica ordena de manera incesante tantas escrituras enlazadas como necesita para pasar de una variable nombre-de-lo-Verdadero a otro: la lógica es en este caso *lo indefinido escritural de un estado civil de la verdad*[1].

[1] Véase: Frege, "On sense and nominatum", en *Readings in Philosophical Analysis*, Feigl y Sellars, Nueva York, 1949, pp. 85-102. "Todo enunciado asertivo, cualquiera que sea el campo a que pertenezcan las denotaciones de las palabras que figuran en él, debe ser tenido, por lo tanto, por un nombre propio; y su denotación, si existe, es, o bien lo Verdadero, o bien lo Falso." "Todos los enunciados poseen, pues, la misma denotación."

A partir de lo cual se puede demostrar, en efecto —intento emprendido por Jacques Lacan y J. A. Miller—, que, denominado, lo Verdadero cae por debajo de sus nombres, no obstante estar presente en su estado civil gracias a la iteración que nos lleva a declarar sin descanso, en su permanente nacimiento, sus nuevos nombres anónimos. El movimiento nominal, la compulsión repetitiva en que se despliega la impotencia de creer que nunca se tendrá el patronímico usual de lo Verdadero, es la marca misma, dentro de la secuencia enlazada de las proposiciones, de lo que sólo es una carencia sobre la cual aquélla se desliza sin resistencia ni éxito.

A este doble proceso (salvación de lo Verdadero y convocación y marca de la carencia) vamos a objetarle la estratificación del significante científico.

Para nosotros, *tanto* la representación ideológica por Frege de su propia empresa *como* la continuación de esa representación en el léxico del Significante, de la carencia y del lugar-de-la-carencia, ocultan la pura esencia productora, el proceso de situación mediante el cual la lógica, en su condición de máquina, jamás carece de nada, a no ser de lo que por otra parte produce.

La lógica del Significante[2] es una metafísica. Representación de la representación, proceso-progreso intraideológico.

1. Triple articulación del proceso lógico

La teoría de la lógica se relaciona con los modos de

[2] Por lógica del Significante entendemos el sistema de los conceptos con los que hay que pensar la articulación del sujeto: Carencia, Lugar, Suplencia, Sutura, Exclusión, Despiezo. Estos conceptos han sido elaborados por Jacques Lacan, y recomendar el proceso de limitación de su uso, el proceso crítico, es reconocer una deuda definitiva para con este autor. La tesis que sostenemos va tan sólo a esbozar la imposibilidad de una lógica del Significante envolvente respecto del orden científico y en la que dice articularse la borradura del corte epistemológico.

producción de una división en la escritura lineal, o sea, la dicotomía de un conjunto estructurado de enunciados "introducidos" en el mecanismo último a título de materia prima (ya trabajada).

Inmediatamente resulta de ello que el requisito único a que debe obedecer el funcionamiento del mecanismo es, en fin de cuentas, que algo sea efectivamente *cortado*, que haya escrituras que sean mecánicamente distribuidas en dos clases separadas y designadas, por alusión al mecanismo utilizado con mayor frecuencia, clase de los enunciados derivables y clase de los enunciados no derivables.

La definición clásica de la *consistencia absoluta* de un sistema –que por lo menos una expresión bien formada no sea derivable en el sistema– designa, precisamente, esa exigencia mínima. Su trasgresión equivale a considerar un mecanismo lógico que no produce nada, no siendo en tal caso la producción otra cosa que la efectiva división de los materiales sobre los que se opera.

Mirándola con mayor detenimiento, se comprueba que la división final implica la sucesiva operación de tres mecanismos ordenados, pues los sintagmas, antes de ser distribuidos, deben ser *formados* y luego *entresacados*, como que ningún sistema de derivación puede someter a todos ellos a su principio de división (lo que sencillamente quiere decir que una máquina especializada posee una entrada en la que sólo pueden introducirse materiales específicos, previamente fabricados).

Por lo tanto, tendremos que distinguir los mecanismos de *concatenación, formación* y *derivación.*

Toda disimulación de la autonomía del segundo mecanismo –con respecto al tercero– produce como efecto la pérdida de la esencia misma: la función productora del proceso lógico[3]. Y nada es más importante que recorrer por orden la maquinaria de la lógica.

a) Concatenación: La materia absolutamente prima del proceso lógico la suministra una esfera particular de la

[3] El operador privilegiado de tal disimulación es el concepto de sentido, con el que se relaciona tanto el nacimiento de lo Verdadero (derivabilidad) como el rechazo del sinsentido (formación-sintaxis).

producción técnica: la escritura. Se trata, en efecto, de un stock de marcas gráficas, separables e indescomponibles, que forman un conjunto finito o a lo sumo enumerable al que llamaremos alfabeto.

El primer mecanismo "recibe" esas marcas, con las que compone *series finitas* (yuxtaposición lineal con repeticiones eventuales). Ha sido montado para producir todas las series finitas de este tipo, y ellas son, por lo tanto, las que encontramos a la salida del mecanismo. Sea S esta producción.

b) Formación: El segundo mecanismo opera sobre S y paulatinamente realiza con ésta una *dicotomía perfecta*, que separa, sin residuo, las series "aceptadas" por la máquina de las series rechazadas. Las expresiones aceptadas se llaman expresiones bien formadas, y mal formadas las otras[4].

Los operadores (las "piezas") de este mecanismo son *las reglas de formación*, que les prescriben a las concatenaciones aceptables ciertas configuraciones; por ejemplo, la máquina llamada "cálculo de los predicados con igualdad" podrá aceptar las series I (x, x) y no–I (x, x), pero rechazará la serie $x(\text{I}, x)$.

Merced a una peligrosa tolerancia semántica, a los enunciados rechazados suele llamárselos sinsentidos.

El conjunto de las reglas de formación constituye la sintaxis.

Destaquemos de inmediato que si, como lo indica en apariencia el célebre teorema de Gödel, la dicotomía última (la del tercer mecanismo) no puede, para una máquina

[4] Que la división se efectúa sin dejar residuo quiere decir que, dada una escritura cualquiera (una serie finita de signos del alfabeto), existe un procedimiento efectivo que permite determinar *sin ambigüedad* la conformidad o la no conformidad de la expresión a las reglas de la sintaxis. Para los lógicos clásicos, esta propiedad sintáctica es objeto de una demostración por recurrencia que recae sobre el número de paréntesis de la expresión. Véase: S. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam, 1964, pp. 72 y ss.

"fuerte", efectuarse sin ambigüedad[5], pues siempre hay enunciados *indecidibles,* la posibilidad misma de ese resultado *presupone la existencia de un mecanismo dicotômico sin residuo,* cual es el que provee de materia prima –las expresiones bien formadas– al mecanismo demostrativo. Las aporías de la derivación son asignables con la condición de una sintaxis perfecta.

El orden significante despezado, marcado por aquello de lo cual carece, sólo es exhibido en su diferencia con un orden autónomo efectivamente cerrado, es decir, integralmente decidible (el de la formación de los sintagmas). En este sentido no se puede sostener que el desgarrón o la iteración compulsiva sean el precio inevitable del cierre. Necesario es decirlo: la existencia de un mecanismo cerrado infalible condiciona la de un mecanismo del que pueda decirse que es incerrable y, por lo tanto, interiormente limitado.

La mostración de una sutura presupone la existencia de una exclusión.

Sea lo que fuere respecto de esta anticipación teórica, recordemos que a la salida del mecanismo sintáctico encontramos el conjunto de las expresiones bien formadas, o sea, E.

c) Derivación: El tercer mecanismo opera sobre E y generalmente se lo monta para producir:

1: Una dicotomía perfecta entre Tesis (o enunciados

[5] Una máquina fuerte es capaz de distribuir las escrituras de la aritmética recursiva. Señalemos que existe un mecanismo lógico débil, pero *perfecto:* el Cálculo de las Proposiciones. En efecto, este sistema es: 1) consistente en todos los sentidos del término; 2) decidible (de toda expresión bien formada se puede saber mecánicamente si es o no derivable); 3) completo (toda expresión bien formada es, o derivable, o de tal índole que, agregada a los axiomas, torne inconsistente el cálculo); 4) categórico (todos los modelos son isomorfos). La mera existencia de este Cálculo ya le plantea algunos problemas a la Lógica del Significante, pues nada en él, así sea un lugar vacío, da testimonio de una carencia. Con toda rigurosidad, este sistema no carece de nada, ni marca la nada, acerca de la cual ya es demasiado decir que el Cálculo carece de ella. Puede sostenerse que la perfección del Cálculo de las Proposiciones es el referente diferencial intralógico de la relativa "imperfección" de los demás sistemas.

derivables) y no-Tesis (enunciados inderivables);

2: Cierto tipo de nexo funcional entre las mitades.

Esta segunda condición es capital. Si la exigencia de dicotomía fuera la única exigencia, los mecanismos lógicos clásicos (como por ejemplo una formalización de la aritmética) no tendrían defecto alguno. Muy cierto es que tales mecanismos separan de manera tajante las expresiones bien formadas en derivables y no derivables, en tesis (T) y no-tesis (NT)[6].

Un enunciado indecidible, como el que construye Gödel, no es, evidentemente, un enunciado que no sea demostrable ni indemostrable (lo que no tendría el menor sentido). Por el contrario, el centro de la prueba de Gödel se alcanza al mostrar que el enunciado *no es* demostrable. Por lo tanto, está bien asignado a una de las dos mitades.

Un enunciado indecidible no es el resto de un corte; es un enunciado tal, que ni él ni su negación son derivables. Un enunciado como éste es, desde luego, *irrefutable* (refutación = demostración de la negación). Pero es explícitamente indemostrable. Hay división sin residuo entre lo derivable y lo no derivable; pero el enunciado de Gödel y su negación están *en la misma mitad.*

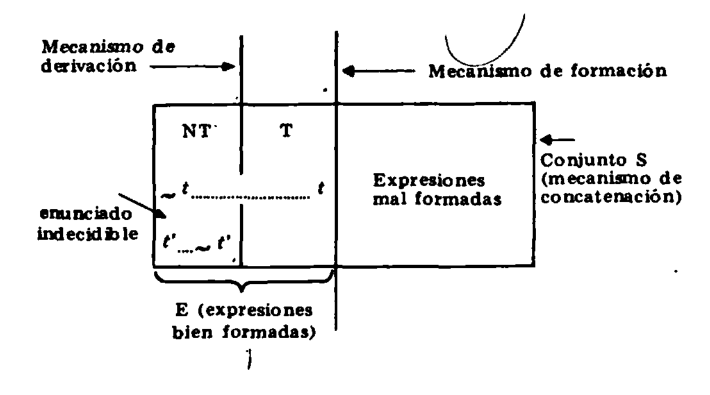
Todo descansa, en este caso, en un operador sintáctico especial –el operador de negación– y en la estructura que

6 Determinar si para toda expresión bien formada existe un procedimiento mecánico (efectivo) que permita saber "de antemano" (sin tener que derivarla) si es o no es derivable, es un asunto *diferente.* La existencia de semejante procedimiento define la *decidibilidad* del sistema. Se sabe (Church, Kleene) que los mecanismos lógicos bastantes fuertes son generalmente indecidibles. No se confunda la *decidibilidad de un sistema* con la existencia o la no existencia de un enunciado tal que ni él ni su negación sean derivables. El problema de la existencia de un enunciado indecidible no es un problema de decidibilidad, sino de *completitud.* Un sistema puede ser decidible e incompleto. Existen, pues, enunciados (indecidibles) respecto de los cuales se puede "decidir" por anticipado, gracias a un procedimiento efectivo, que no son derivables ni refutables. Sin embargo, la recíproca no es verdadera: un teorema metamatemático importante vincula los resultados de indecidibilidad (Church) a los resultados de incompletitud (Gödel). Si un sistema formal (bastante fuerte) es indecidible entonces es, o inconsistente, o incompleto.

éste gobierna.

Consiguientemente, no se puede sostener que el teorema de Gödel significa que toda dicotomía deja un resto, ni que toda dualidad implica un tercero disyunto descentrado con respecto a la regla que ordena interiormente cada término del par. Esta lectura (frecuente) del teorema es una importación metafísica. En realidad, el problema atañe a las condiciones estructurales particulares impuestas al tercer mecanismo lógico como sobrecarga de su función separadora, lo que resume nuestra anterior condición 2).

Se exige, en efecto, que haya en el alfabeto un operador (negación o de otro tipo: el sentido intuitivo de la negación es en este caso un obstáculo) tal, que si un enunciado pertenece a una mitad ($t \in T$ o $t \in NT$), entonces el enunciado obtenido al aplicarle el operador, o sea ~[7], esté en la otra mitad ($\sim t \in NT$ o $t \in T$).



[7] De acuerdo con el uso, notaremos ~, en todo el resto de la presente exposición, el signo de negación.

Lo que en este caso está desde un primer momento en cuestión no es el corte como tal, sino una función de vinculación entre las mitades separadas. El límite gödeliano no se relaciona con la dicotomía; por el contrario, atañe a la unidad-de-correspondencia de las partes disyuntas.

El enunciado de Gödel significa: sea la relación funcional que vincula a todo enunciado con su negación: *t*. . . . ~ *t*. No hay dicotomía efectiva tal que *todas* estas relaciones estén cortadas.

Sin duda es dable aguardar que se pueda expulsar *de* T (enunciados derivables) a todas las relaciones *t*. . . ~*t*, sin lo cual el sistema sería inconsistente. Pero entonces se muestra que siguen estando siempre en NT precisamente las que incumben a los enunciados indecidibles.

Por lo tanto, en este punto tenemos que considerar un desgarrón de estructura y no una dicotomía. La clave de la limitación atañe, paradójicamente, al hecho de imponerle al mecanismo separador *no ser* perfecto y preservar el concepto de una *relación* reversible entre las mitades, de manera que la limitación, lejos de atestiguar que en un espacio producido por división figura el vestigio del desgarrón del cual resulta, más bien muestra que no es posible producir de modo indefinido el signo del otro, que en ciertos sitios se ha borrado toda huella y que un mecanismo fuerte impone una total división en el rechazo que efectúa, en cada una de sus partes, de ciertas marcas del viejo Todo.

Lo indecidible no es la suturación de la carencia, sino *la exclusión de lo que falta* por el fracaso que producirá en lo derivable todo lo no derivable en su condición de negado.

La limitación significa que existe en un punto, entre las partes T y NT, una *distancia sin concepto*, cual es la que hace figurar en el espacio de las no-tesis un enunciado cuya negación no se inscribe en el espacio de las tesis y que se halla, por lo tanto, no relacionado con éste. El teorema de Gödel es el sitio de mayor eficacia de la separación, no el lugar de su fracaso[8].

[8] En cuanto a descifrar el hiato entre la intuición y el formalismo, es un riesgo que no correremos.

Por consiguiente, si los teoremas de "limitación" resultan de las condiciones de imperfección asignadas al mecanismo dicotómico, necesitamos retocar el concepto de este último para integrar en él tales condiciones. Y diremos: la lógica es un mecanismo triplemente articulado (concatenación, sintaxis y derivación) que produce una división terminal en la escritura lineal, un mecanismo tal que, dado un sintagma conveniente, deba poderse:

i) Distribuirlo en una de las dos mitades (T o NT);

ii) Construir un sintagma mecánicamente obtenido a partir del primero por adjunción de un operador (generalmente llamado negación) y tal que, si el primero está en una mitad, el segundo está en la otra.

La condición i es idealmente [9] satisfecha por los mecanismos clásicos (teoría de los conjuntos o formalización de la aritmética). La segunda sólo lo es por mecanismos débiles: un mecanismo fuerte corta *demasiado bien.*

2. Nulidad de la cosa. Identidad de las marcas

La descripción del mecanismo lógico nos autoriza a cuestionar la construcción, dentro de este terreno, del concepto de sutura y nos permite determinar con exactitud la función metateórica del cero.

Anunciemos, para comenzar, nuestras tesis:

1) El concepto de identidad sólo tiene valor para las marcas. En ninguna parte tiene la lógica que conocer lo relativo a una *cosa* idéntica a sí, ni aun en el sentido de que la "cosa" fuese el objeto del discurso científico.

2) El concepto de verdad es un indicador ideológico, resumidor-disimulador de los conceptos científicos de selección y división. Designa de manera global un mecanis-

[9] "Idealmente" ya que, si es cierto que toda expresión bien formada está en T o en NT, la existencia de un procedimiento "efectivo" (recursivo, algorítmico) que permita determinar en cuál de estas dos clases figura demuestra ser a menudo imposible. Es el problema de la *decidibilidad del sistema* (véase nota 6).

mo diferenciado.

3) El cero no es en un sistema *la marca de la carencia*, sino el signo en que se compendia *la carencia de una marca*. 0 es, mejor dicho, la indicación, dentro de un orden significante, de que en la mitad rechazada de otro orden está presente una escritura.

4) El significante lógico-matemático sólo se sutura consigo mismo. Es indefinidamente *estratificado*.

5) En lógica, toda carencia que *no es* un significante *no tiene* significante alguno: está excluida.

6) El concepto de sutura no articula con la carencia el significante en general. Su pertinencia requiere una condición específica en el significante. Y ésta no la construye el psicoanálisis, sino el materialismo histórico: solamente el significante *ideológico* es suturado.

La discusión que acerca tanto de Frege[10] como de Boole plantea J. A. Miller y la que formula Lacan sobre el teorema de Gödel o de la semántica de la implicación son ambiguas en el sentido de que desarrollan de manera simultánea y sin distinción lo que incumbe a la construcción efectiva de un mecanismo lógico y lo que atañe al discurso (ideológico) mediante el cual los lógicos se representan esta construcción.

Hay, pues, que tener la precaución de no comprender *dentro* del proceso lógico toda retraducción de la instancia articulatoria de los signos en el léxico de la subsunción. Esta noción, cerrada dentro de la relación referente (especularia) –como por lo demás la noción de denotación, conexa a ella–, encubre la esencia estrictamente funcional de las remisiones interiores al mecanismo lógico.

Nada autoriza en este caso la determinación de un *objeto*. La cosa queda nula: ninguna escritura puede objetivarla.

En este espacio mecánico sólo es dable encontrar *funciones* reversibles de sistema a sistema, de marca a marca: dependencias mecánicas de mecanismos. La propia semántica sólo entra en la lógica por lo mismo que trabaja entre dos órdenes significantes lógico-matemáticos y bajo la

10 Véase "La Suture", en *Cahiers pour l'analyse*, Nº 1.

condición de que las funciones de correspondencia entre éstos sean igualmente lógico-matemáticas[11].

Ni la cosa ni el objeto tienen la posibilidad de llegar a una existencia mayor que la de su exclusión sin rastros.

De ello resulta que la exigencia leibniziana de identidad-consigo, de la que depende que la verdad quede a salvo, sólo es intralógica (teórica) si concierne a la identidad de las marcas. Propone, por una confianza inaugural en la permanencia de las grafías, la existencia de una aplicación "idéntica" del orden significante a sí mismo, que preserva su estructura.

En suma, que es la ciencia íntegra quien toma la identidad-consigo, no por un predicado del objeto, sino por un predicado de las marcas. La regla vale, desde luego, para los *hechos de escritura* de la Matemática. E igualmente vale para las *inscripciones de energía* de la Física. Como admirablemente lo mostró Bachelard, la única regla de sustitución propiamente física atañe a los operadores artificiales: "El principio de identidad de los aparatos es el verdadero principio de identidad de toda ciencia experimental"[12]. Lo que se sustrae a toda ambigüedad en las sustituciones es la invariación técnica de los rastros y de los instrumentos.

Así determinada, la regla de identidad-consigo no sufre excepción alguna y no tolera la evocación, ni aun rechazada,de lo que se zafa de ella. Lo no sustituible por sí mismo es un impensado radical cuyo mecanismo lógico *no deja rastros.* Imposible producir su evanescencia, su espejeante oscilación, como hace Frege con la cosa no idéntica a sí misma quiméricamente (ideológicamente) convocada —y luego revocada— a los fines de asignación del cero. Lo no sustituible por sí mismo es excluido sin recurso ni

[11] A nuestro modo de ver, Church tiene razón en identificar en última instancia la Semántica con la Sintaxis (véase *Introduction to mathematical logic*, Princeton, 1956, p. 65: "La asignación de denotaciones y valores a las expresiones bien formadas puede consistir en correspondencias abstractas; su tratamiento pertenece, pues, a la sintaxis teórica"). La Semántica se vuelve *lógica* (científica) sólo si es *la sintaxis de la diferencia de las sintaxis.*

[12] *Activité rationaliste de la Physique contemporaine, p. 5.*

marca.

No obstante, en los sistemas lógicos se construye un predicado homónimo: existen "cálculos de la identidad" en los que se marca la no-identidad. Para evitar los deslices de lenguaje convendremos en designar "igualdad" a ese predicado, notado $I(x, y)$ (que comúnmente se lee: x es idéntico a y).

La homonimia usual disimula, como vamos a mostrarlo, una relación de presuposición que hace aparecer, una vez más, la prioridad de lo excluido.

Si se considera, por ejemplo, un cálculo del primer orden (en el que es imposible cuantificar los predicados), implícitamente se definirá la *constante* predicativa de igualdad I por dos axiomas[13]:

– $I(x, x)$ (Reflexividad total)

– $I(x, y) \supset [A(x) \supset A(y)]$

Podría creerse que el axioma de reflexividad tematiza en las escrituras del cálculo (a la salida del mecanismo sintáctico) la identidad-consigo, fundadora de una letra cualquiera. Nada de eso. Lo que hemos convenido en llamar igualdad-consigo de una variable *no es* la identidad consigo de toda marca. La mejor prueba de ello es que esa igualdad admite la construcción de su negación: $\sim I(x, x)$ es una expresión bien formada del sistema, una expresión legible.

Sin embargo, sería un error imaginar que $\sim I(x, x)$ (léase: x no es igual-o idéntico-a sí) *marca* en el sistema –lugar del mecanismo– la impensable no identidad-consigo del signo y que una expresión como ésa (correcta) organiza la suturación con el cálculo de este impensable. Al contrario, la existencia significante de $\sim I(x, x)$, lejos de marcar lo impensado, supone su funcionamiento *sin marca.* Es necesario *que no se pueda* pensar que x, en

[13] En un cálculo del segundo orden, en el que los predicados pueden cuantificarse, la igualdad se definiría de manera explícita, de acuerdo con la instancia leibniziana de los indiscernibles, en este caso restringida al orden de los signos: dos variables de individuo que caen, sin excepción, bajo los mismos predicados son sustituibles en todas partes, sin que nada marque su diferencia. Con las notaciones clásicas:

$$I(x, y) = df(\forall a)\,[a(x) \supset a(y)]$$

su condición de marca, es "otro" que x –incluso marca ubicado de otra manera– para que ese enunciado sea lógicamente producido. La simple convocación-revocación de una no identidad consigo de x, el espejeo de su autodiferencia, bastará para aniquilar la existencia escritural de todo el cálculo y, de manera muy especial, de las expresiones, como $\sim$ I(x, x), en la que x se halla en doble ocurrencia.

La producción del concepto lógico de igualdad y de no igualdad consigo presupone la exclusión de lo no-idéntico-a-sí escritural. La falta de lo igual se alza sobre la ausencia *absoluta* de lo no idéntico.

Sin duda la estructura de un cálculo de la identidad implica, generalmente, la derivación de la tesis: $\sim$ I(x, x): es falso que x no sea igual a x. Pero esta "negación" –en rigor, de carencia– no marca otra cosa que el rechazo (la presencia) a la otra mitad (la de las no-tesis) del enunciado $\sim$ I(x, x), producido de modo idéntico por el mecanismo sintáctico. Ninguna ausencia se convoca aquí que no sea la distribución en una clase antes que en su complementaria, y conforme a las reglas positivas de un mecanismo, de lo que el mecanismo recibe de las producciones de otro.

Esto nos permite relacionar sin infiltraciones ideológicas el concepto de identidad con el concepto de verdad.

Ni la cosa ni su concepto traslucen nada al respecto.

Pero "la verdad es" –pura designación cómoda de un complejo operatorio– significa, si hay que puntualizar identidad e igualdad:

Identidad: La lógica sostiene con la escritura una relación de la que sólo puede recibir las marcas testimoniadas en la cadena como sustituibles por sí mismas en todas partes. A decir verdad, no importa qué marcas, la fundamentación de cuyo invariable reconocimiento compete a la técnica (exterior) de las grafías.

Igualdad: Existe un orden significante (un mecanismo de derivación) cuyas compulsiones selectivas son tales, que los enunciados I(x, x) y $\sim$ I(x, x) se distribuyen en mitades diferentes.

Si se desea considerar, dentro de una perspectiva más cabalmente logística, que la producción del mecanismo-3

es el conjunto de las tesis derivables, entonces se dirá: el mecanismo ha sido montado de tal manera que se produzca I(x, x) y se rechace ~I(x,x).

Estas dos escrituras, no obstante, son producidas con anterioridad en *la misma mitad* (la de las expresiones correctas) por un mecanismo-2 (una sintaxis), sólo a partir de lo cual puede darse sentido al rechazo de una de ellas por el mecanismo de derivación.

Lo no-igual-a-sí sólo se excluye bajo la condición de tener que ubicarse en un orden significante autónomo, sedimentariamente organizado "debajo" del que ya no le hace lugar.

Preservar a cualquier precio, en este punto, la correlación de lo igual a sí con lo verdadero equivaldría a decir: la verdad es el sistema de compulsiones que diferencian el mecanismo-3, que produce el enunciado único I(x, x), del mecanismo-2, en el que se producen de manera simultánea los enunciados I(x, x) y ~ I(x, x).

Lo igual-a-sí, como salvación de la verdad, se reduce a no ser más que una diferencia entre sintaxis y derivación, esto es, entre materia prima y producto; con mayor exactitud, entre dos mecanismos de selección, el segundo de los cuales es más fino que el primero.

3. ¿Marca de la carencia, o marca faltante?

De aquí en adelante ya podemos arriesgar el Cero.

Introducido por vía de definición, el cero es un símbolo abreviador, un símbolo que vale para una escritura producida por un mecanismo-2[14]. Se trata de una *abstracción* (de una construcción de predicado de un argumento) sobre relación.

Adoptemos provisionalmente el lenguaje "conjuntista" de Frege.

Dada una relación cualquiera entre variables de individuo, o sea R(x, y) . se puede construir la clase de los x que satisfacen R(x, x) y considerar la pertenencia a esta

[14] En adelante notaremos M_1, M_2 y M_3 los mecanismos de concatenación, sintaxis (del cálculo de predicados) y derivación *(idem)*, respectivamente.

clase como una propiedad, como un predicado: el predicado "estar ligado a sí mismo por la relación R". De este modo se ha procedido a *la abstracción de la reflexividad sobre la relación R.*

Convengamos en notar Ar.R el nuevo predicado. Ar.R(x) "significa": x tiene la propiedad de estar ligado a sí mismo por la relación R.

Estas consideraciones, que descansan en un concepto "intuitivo" de la clase, deben ser ahora abandonadas, pues son extrañas al mecanismo lógico; atañen a la pedagogía ideológica del sistema.

En verdad, simplemente disponemos de una regla sintáctica inherente a un M_2, que nos permite:

a) Construir, a partir de un predicado de *dos* variables (o sea, R), la escritura aceptada Ar.R.

b) Tratar esta escritura exactamente como cualquier otro predicado de *una* variable (lo cual nos autoriza a escribir, por ejemplo,(Ar. I(x)),etc.).

La abstracción es en este caso una regla que permite la formación mecánica de un predicado de un argumento a partir de un predicado de dos argumentos.

Naturalmente, la abstracción puede operar sobre la relación I(x, y), llamada relación de identidad. Como I(x, x) es, precisamente, un axioma del cálculo de la identidad, el M_2. de éste derivará trivialmente el enunciado ($\forall$ x) (Ar.R(x)), o sea: todo x está ligado a sí mismo por la relación I.

Pero la abstracción de reflexividad puede también hacerse sobre la relación de no igualdad: I(x, y), ya que esta escritura es producida por M_2.

Así se obtiene *una* de las posibles definiciones del *predicado cero.*

$$0 = Ar. \sim I$$

0(x) podrá leerse: x es un cero; tiene la propiedad de no ser igual a sí mismo.

Satisfacer 0(x) –ser un cero– de ningún modo impedirá que el signo x y el signo 0 sean en todas partes sustituibles por sí mismos. Siguen siendo idénticos, aun cuando soporten –o designen– la no igualdad (identidad)

consigo[15].

Decir que el cero, así definido, "apunta" a un objeto no idéntico a sí, o que es el predicado de lo vacío, es convocar al punto donde sólo se sostienen sustituciones de escrituras: la lectura metafísica del Ser y de su Pleno. Pues la escritura $\sim I(x, x)$ no ocupa el lugar de ninguna otra cosa ni marca el lugar de una nada.

El cero, a su vez, llega a todas partes donde se yergue aquello a lo cual él equivale por convención escritural, o sea, Ar. $\sim$ I. Es positivamente construido por M_2.

Llamemos mecanismo-4 a un sistema lógico que adjunte a M_3 la *constante* predicativa (el nombre propio) 0, tal cual la hemos dejado definida. ¿De qué carencia podría ser la marca esta adjunción dentro del orden significante así designado?

M_3, como hemos visto, *rechaza* la escritura $\sim I(x, x)$ y *deriva* la escritura $I(x, x)$. ¿No hay que considerar que el predicado cero *marca* en lo no rechazado de M_4 lo que ha sido rechazado en M_3? ¿El predicado no es satisfecho por término "alguno"?

En verdad, estas descripciones son extrañas a la teoría lógica. El cero es sencillamente una escritura aceptada por M_2 e introducida –adecuada a ciertas reglas de empleo– en M_4.

15 Acaso cause asombro que construyamos el cero, no como un término, sino como un *predicado*. Pero a J. A. Miller es a quien hay que plantearle el problema relativo a la continuidad que otorga a la indistinción en que Frege mantiene variables de individuo y variables predicativas. Por cierto que para Frege un predicado es un término. Pero esta posición es insostenible, pues origina la paradoja de Russell, quien iba precisamente a echar abajo la aritmética formal de Frege. Ahora bien, el texto de Miller no integra a su *uso metateórico* de la construcción del número la *inconsistencia teórica* de ésta. Y de ahí una incertidumbre epistemológica, sólo disipada si se distingue en cada *mención* del texto (embrollado) de Frege su nivel de funcionamiento, o sea: *a*) Un esfuerzo teórico de construcción de los cardinales finitos; *b*) Los errores teóricos dentro de ese esfuerzo (no estratificación de las variables); *c*) La re-presentación ideológica de lo teórico (denotación, concepto, número del concepto, etc.); *d*) La re-presentación ideológica de los errores teóricos (teoría del cero).

No obstante, si se desea pensar el vínculo del cero con la no figuración de ~ I(x, x) en la derivación de M3, es necesario un uso un tanto alegórico de los conceptos. Pero es admisible decir: El cero marca en M4 (con forma predicativa), no la *falta de un término* para satisfacer la relación, sino una *relación faltante* en M3: la relación ~ I(x, x)). Rápidamente hay que agregar: Si la relación puede faltar en M3, lo puede *en la medida en que figura en M2.*

Juego de apariciones y desapariciones entre órdenes significantes sucesivos y nunca expuestos a la convocación de una carencia en el objeto ni en la cosa.

Sistema de diferencias entre sistemas ordenado por sustituciones, equivalencias y retiros: *marca faltante, nunca marca de la falta.*

No es un blanco cuyo lugar es designado por el cero, sino la *borradura de una huella*: bajo su marca (Ar. ~ I) deja visible la *otra* marca (~ I(x, x)) tal como fue rechazada por la derivación.

El cero es la marca (en M4) de una marca (en M2) faltante (en M3).

De este lado de la cadena significante, si es científica, jamás hay otra cosa que cadenas. Si el significante se sutura, lo hace consigo. De sí mismo falta en cada uno de sus niveles: regula sus faltas sin salir de sí. El significante científico no es saturado ni sajado, sino estratificado[16]. Y

[16] Los cálculos ramificados (las diversas instancias de la teoría de los tipos) intentan proyectar la estratificación sobre un solo estrato: la construcción de una *lógica de la estratificación* que presuntamente "expresa" la *estratificación de la lógica.* El inevitable axioma de *reductibilidad* designa cierto fracaso de esa tentativa (véase por ejemplo: W. V. O. Quine, "On the axiom of reducibility", en *Mind,* 45, pp. 498-500). El sistema "expansivo" Σ de Hao Wang es más bien un *recorrido constructivo* de la estratificación; no por ello queda menos expuesto a considerables dificultades relativas a la construcción de los ordinales (véase por ejemplo: Hao Wang, *A survey of Mathematical Logic,* Pekín, 1964, pp. 559 y ss.; sobre todo, p. 643). Por nuestra parte, estamos convencidos de que la multiplicidad estratificada del significante científico, inherente al proceso de producción de la ciencia, es irreductible a uno solo de sus órdenes. El espacio de las marcas no permite que

la estratificación revoca el axioma con que Miller, en otro texto [17], caracteriza la exclusión: la carencia de una carencia es también una carencia. No lo es si lo que llega a faltar ya estuvo siempre marcado; de allí, el intersticio queda suficientemente designado por la diferencia productora de los estratos. Las *paredes* están siempre prescritas.

4. El suplicio de la filosofía

¿Hay entonces que anular el concepto de sutura? Se trata, por el contrario, de prescribirle su función al asignarle su campo.

La excepción resulta del hecho de que un orden significante —la ciencia— existe, estratificado, de tal modo que ninguna carencia ha sido marcada como para poder descubrir una marca a su vez en el orden subyacente del que el primero es diferencia. La ciencia no cae bajo el concepto de la lógica del significante. A decir verdad, justamente porque no cae la constituye: el corte epistemológico debe ser pensado bajo las especies irrepresentables de la desuturación.

De modo que *no hay sujeto de la ciencia.* La ciencia, estratificada al infinito, regulando sus pasos, es el espacio puro, sin revés ni marca o lugar de lo que excluye.

Exclusión, pero de nada; cabe llamarla psicosis de ningún sujeto. Por lo tanto, de todos. Universal con pleno derecho, delirio compartido, basta atenerse a ella para no ser ya nadie, anónimamente disperso en la jerarquía de los órdenes.

se lo proyecte en un plano. Y esto sólo es resistencia (limitación) a los ojos de un deseo *metafísico.* El deseo científico es la trasformación-recorrido del espacio estratificado, no su proyección.

17 J. A. Miller, "L'action de la structure", en *Cahiers pour l'Analyse,* Nº 9, 1968.

La ciencia es el exterior sin ceguera alguna[18].

Recíprocamente, la estructura significante definida por la suturación será designada en su particularidad (sitúa a la carencia), en primer término como no-ciencia. La sutura no es, pues, un concepto del significante en general, sino la propiedad característica del orden significante en donde viene a atascarse un sujeto. Nominalmente *la ideología.*

Siempre hay un sujeto de la ideología, pues tal es la marca misma en que ésta se reconoce. Lugar de la carencia, hendidura de lo cerrado: conceptos a partir de los cuales hay que construir la ley de funcionamiento del discurso ideológico.

Mídase lo que se halla en juego: la posible articulación del Materialismo Histórico con el Psicoanálisis. El primero produce la Tópica de los órdenes significantes particulares (las ideologías); el segundo, las estructuras de su eficacia, las leyes de entrada y conexión mediante las cuales son finalmente ocupados los sitios que distribuye la ideología.

Si el Materialismo Histórico pretende elucidar por sí solo la esclavitud subjetiva a las ideologías, o si el Psicoanálisis borra en la generalidad de una lógica del significante la especificidad del lugar en el que debe señalar la marca de la carencia, entonces ambas disciplinas se pliegan una a la otra, abatidas por igual entre sí. No estratificadas: no científicas.

18 Si existe el propósito de exhibir la escritura como tal, haciendo caso omiso del autor; si se quiere obedecer a Mallarmé, ordenándole a la obra escrita que se produzca sin tema ni Sujeto, existe un medio radical, secular y absolutamente privativo: la entrada en las escrituras de la ciencia, cuya ley es justamente aquélla. En cambio, cuando una escritura deleitosa, sin duda, pero evidentemente recargada de las marcas de todo lo que niega, viene a mostrarnos lo que se sostiene por sí solo en el Exterior escritural, *sabemos* de antemano (es un problema decidible. . .) que exhibe *la ideología* de la diferencia y no su proceso de realidad. Los escritores, si son reacios a convertirse en matemáticos, deben atenerse en sus programas al honorable principio de sus producciones: ser *ideología mostrada* y de ahí, aunque autónoma, irreductiblemente suturada.

Es importante, luego, afirmar que el psicoanálisis no tiene *nada que decir* de la ciencia, aun cuando pueda enseñarnos mucho acerca de los científicos sometidos a él. Y con este silencio determina negativamente el significante del que habla y en el que articula al Deseo. El materialismo histórico duplica de manera positiva esta determinación al producir la configuración estructural donde toma ubicación la instancia ideológica.

Por tanto, aseverar que la diferencia ciencia/ideología pueda ser borrada dentro de una lógica de la iteración oscilante y designar un sujeto de la ciencia es prohibir que Marx y Freud puedan, en su disyunción misma, juntarse.

Exhibir el concepto de sutura en el sitio mismo de su inadecuación (la matemática) y, aprovechando la proyección por los científicos de la re-presentación (ideológica) de lo que hacen sobre lo que hacen (una ciencia), concluir en la legitimidad de este concepto para lo universal de los discursos es doblegar la ciencia a la ideología: es desestratificarla para prescribirle su carencia.

Llamemos "filosofía" a la región ideológica especializada en la ciencia: encargada de *borrar* el corte al *mostrar* el significante científico como paradigma regional del significante-en-sí: relación de Platón con Eudoxo, de Leibniz con Leibniz, de Kant con Newton, de Husserl con Bolzano y Frege, y quizá de Lacan con la Lógica Matemática.

La ciencia –ya lo hemos señalado– es lo que sólo se relaciona consigo mismo, el afuera múltiple. Ningún orden significante puede abarcar los estratos de su discurso.

De allí la imposibilidad recurrente de la filosofía, cuya polimorfa historicidad da testimonio de su sumisión a la ley de la ideología: la filosofía transporta la marca de su carencia e insiste en ella.

¿Y qué le falta? La borradura del corte supone la construcción intrafilosófica de un concepto de la ciencia. La filosofía está sometida a marcar, dentro de su propio orden, el significante científico como espacio *total*. Pero la ciencia –indefinidamente estratificada, exclusión múltiple, diferencia de diferencias– no puede recibir esa marca.

La multiplicidad de sus órdenes es irreductible[19]: lo que en la filosofía se enuncia como ciencia es, inevitablemente, *la falta* de ciencia. De lo que la filosofía carece y con lo que se sutura es su objeto mismo (la ciencia), marcada no obstante en ella por el sitio que él jamás ocupará.

En rigor de verdad es posible adelantar el aserto de que *la ciencia es el Sujeto de la filosofía*, precisamente porque no existe Sujeto de la ciencia.

Vale decir, retomando la invocación de Leibniz: para que la ideología quede a salvo (entendámonos: la clase dominante) debe *situarse* en ella la incerrable apertura que en ella desgarra la ciencia. En esa ubicación se cumple la filosofía.

Por eso la ciencia y la práctica de la ciencia llevarán siempre al suplicio a la filosofía. Convocando lo múltiple a su autosuficiencia, el juego científico nos regocija con la enseñanza de su no-presencia (cuando no bajo las especies de lo que en él induce su carencia) en el discurso filosófico. Gracias a la ciencia nos enteramos de que *existe* lo no-suturado, lo excluido, en el que no falta la propia carencia, y de que la filosofía, en caso de mostrarnos lo contrario –bajo la apariencia del Ser que se roe y que se tutea con la marca del no-ser–, se consume por mantener viva su producción suprema y particular: Dios o el Hombre, según el caso.

Spinoza lo había afirmado categóricamente[20]. Y también Lautréamont cuando pronunció con cierta gula sagrada el elogio de las matemáticas: "Oh, severas matemáticas, no os he olvidado, vosotras cuyas sabias lecciones, más

19 Lo que evidentemente no quiere decir que sean imposibles "síntesis" regionales, transferencias, intricaciones. La historia de las ciencias piensa la *conexidad local* de los estratos y la estratificación de tal conexidad. La grandeza de Auguste Comte no deja de provenir del hecho de haber advertido que, pese a los desplazamientos e intersecciones susceptibles de producirse, la multiplicidad y la jerarquía dentro del orden significante son propiedades inherentes al concepto de la cientificidad.

20 Texto célebre, Libro I, apéndice. Nunca el hombre habría trasgredido la ilusión si no hubiese sobrevenido este hecho sorprendente: las matemáticas.

dulces que la miel, se filtraron en mi corazón como una ola refrescante" *(Maldoror,* canto segundo).

Pues Lautréamont, entregándonos la clave de su entusiasmo, añade soberbiamente: "Sin vosotras, tal vez me habría visto vencido en mi lucha con el hombre".

Efectivamente, nada falta en la matemáticas que no sea desde luego significante: marcas indefinidamente sustituidas por sí mismas en la complicación de su embrollado vagabundeo.

La ciencia es el verdadero architeatro de la escritura: rastros, rastros borrados, rastros de rastros, movimiento en el que jamás nos exponemos a encontrar ese detestable rostro del Hombre: el signo de la nada.

La subversión infinitesimal

por
Alain Badiou

1. Soporte e inocupación

Lo finito –trasgresión iterante, según Hegel, de su límite– es esencialmente lo que admite y por lo tanto exige una inscripción suplementaria. De ahí que se constituya conforme al sitio vacío en el que esa inscripción, de la que carece, es posible. Un número x_n es lo que determina "a la derecha" el lugar de su sucesor: $(x_n\ S) \rightarrow (x_n\ Sx_n + 1)$. Inscribirse en uno de los lugares que distribuye S es asignarle al otro lugar la exclusividad compulsiva del Blanco. El efecto numérico se agota en el incesante desajuste del lugar vacío: el número es desplazamiento del lugar en que falta.

Esta operación presupone, no obstante, un espacio (único) de ejercicio, es decir, un blanco fuera-de-lugar en el que se desplace el lugar en la retracción de lo inscrito. Es lo mismo que Mallarmé designa como blancura inicial, o solitaria. O, más profundamente, "gratuita", puesto que sólo de lo escrito recibe el estatuto de ser el lugar de la escritura que se produce[1].

Por eso lo infinito "en potencia", la indefinitud de la progresión, demuestra ser intempestivamente la infinitud "en acto" de su *soporte.*

Se lo prueba si se quiere objetivar en alguna mecánica

1 "Cuando en una hendidura –la menor, diseminada– se alinea el azar vencido palabra por palabra, indefectiblemente el blanco equivale, recién gratuito, a cierto ahora..." Mallarmé, *Le mystère dans les lettres.*

el concepto de procedimiento efectivo o de algoritmo. La máquina de Turing, que lleva a cabo este programa, es en efecto realizable poco menos que como dispositivo material, únicamente separado de la inscripción legible sobre papel ponderoso —que debe suponerse infinito— por la cinta que soporta las sucesivas marcas. Toda la idealidad matemática de la máquina de Turing, todo lo que de la universalidad de las razones se manifiesta en ella, se concentra en esa proposición. El hecho de que el concepto de algoritmo no pueda ser cabalmente imaginado en el espacio odológico define, de acuerdo con esta misma imposibilidad, la realidad del infinito-soporte.

El infinito-soporte es, para una cadena algorítmica, la unidad no marcable de su espacio de inscripción.

Consideremos ahora un campo de objetos matemáticos asignables conforme a los procedimientos de construcción que prescriben sus axiomas. Por ejemplo, e igual que precedentemente, los números naturales definidos por la lógica de la operación "sucesor".

Supongamos que los procedimientos permiten designar un lugar tal, que ninguno de los objetos construibles dentro de este campo pueda marcarse en él sin contradicciones. Llamaremos infinito-punto del campo a una marca *suplementaria* que obedece a las siguientes condiciones:

a) Ocupa el lugar vacío inocupable;

b) Incumbe, respecto de todo lo que no pertenece a la ocupación, a procedimientos iniciales.

El infinito es en este caso la designación de un más allá propio de los algoritmos del campo: la marcación de un punto, inaccesible[2] según estos algoritmos, pero que so-

[2] En teoría de los conjuntos, un cardinal inaccesible es, precisamente, un infinito-punto, respecto de los cardinales más pequeños que él, para los algoritmos expansivos: *a)* paso al conjunto de las partes; *b)* paso al conjunto-unión o conjunto de los elementos de los conjuntos que son elementos del conjunto inicial. El axioma que plantea la existencia de un cardinal inaccesible superior a lo infinito enumerable es un axioma de infinito extremadamente fuerte. En la teoría obtenida por adjunción de un axioma como éste a la teoría clásica de los conjuntos se puede demostrar la consistencia de esta última. Véase, por ejemplo: J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, pp. 303 y ss.

porta su reiteración.

Este infinito tiene una doble relación con los procedimientos de construcción, puesto que éstos únicamente permiten determinar el lugar inocupable que aquél pasa a ocupar y puesto que el primero permite el recomienzo de la eficacia de los segundos. Pero el infinito pertenece igualmente al campo de ejercicio de los procedimientos —es su suplementaridad—, ya que marca en él lo que sólo ha demostrado ser vacío. De este modo se reconocerá que el infinito cierra el campo al ocultar los vacíos determinados en éste, pero también que abre un sobrecampo como primer punto de un segundo espacio de ejercicio de los procedimientos iniciales. Este intervalo del cierre y la apertura define al infinito-punto: cero de un estrato superior.

Sea, por ejemplo, la relación de orden sobre los números enteros naturales. Permite construir el concepto de un lugar que ningún número puede ocupar: el lugar del número que sería mayor que todos los demás. Es un *lugar* perfectamente construible, pues el enunciado "para todo x, $x < y$" es un enunciado bien formado del sistema, referido a una relación definida. Ahora bien, en este enunciado la *variable* "y" marca el lugar en cuestión. Sin embargo, ninguna *constante* del sistema, ningún *nombre propio* de número, puede ocupar este lugar —sustituir a la variable "y"— sin caer en contradicción. Asignable según los procedimientos del campo numérico, el lugar es, no obstante, trasnumérico. *Todo número falta en este lugar.*

Supongamos ahora que aumento el alfabeto del sistema de una constante —o sea, i, que no es la escritura de número alguno— y que defino su uso mediante la ocupación del lugar trasnumérico, formulando que para *todo* número n tenemos $n < i$.

En el sentido de los modelos "normales" del sistema, claro está que i *no es* un número entero. Pese a todo, si puedo, sin caer en contradicción, operar (calcular) sobre i, de acuerdo con los procedimientos iniciales del campo; si puedo, por ejemplo, definir el sucesor de i, o sea, $i + 1$, o la suma $i + i$, etc., diré que i es un *número entero infinito.* Entendámonos: un infinito-punto relativo a la estructura de orden sobre el campo de los enteros natura-

les.

El infinito-punto es, pues, la marcación de un inaccesible del campo, completado con un *forzamiento* de los procedimientos que los requiere a cuenta por lo mismo que han sido excluidos. El forzamiento implica, por supuesto, un retoque de las disposiciones propias del campo, puesto que los objetos construibles en el sobrecampo pueden ocupar lugares que no ocupan los del campo. El nuevo espacio de ejercicio de los procedimientos se desprende del precedente. Los modelos del sistema se estratifican. A estos efectos de la marcación de los lugares vacíos construibles los llamaremos *refundición*[3].

El infinito-punto de un campo es una inscripción-refundición.

Se observará que, si el infinito-soporte es exigible por la *posibilidad* recurrente de inscribir una marca en el lugar vacío asignado por la relación primitiva del campo, en cambio el infinito-punto se origina en la *imposibilidad* campal de una marca. Uno soporta las reglas de construcción; el otro, inaccesible, las refunde y vuelve a lanzarlas, determinando así un nuevo espacio de inscripción, una diferencia en el soporte: *el infinito-punto es el diferencial del infinito-soporte.*

[3] Tomamos de F. Regnault el concepto de *refundición*, con el que este autor designa esos grandes retoques en los que, mediante un regreso a lo impensado de su época anterior, una ciencia transforma de manera global – mecánica relativista después de mecánica clásica– el sistema de sus conceptos. Evalúese la lógica de este préstamo que tomamos con la observación, por ejemplo, de que el sistema de los números "imaginarios" se obtiene por ocupación, dentro del campo de los números reales, del lugar que designa x conforme a la ecuación $x^2 + 1 = 0$. El símbolo *i*, formalmente asignado a ese lugar, como es un número, asegura la refundición extensiva de los reales por una puntual infinitud, cual es la de lo que históricamente los matemáticos llamaban elemento ideal.

2. Signatura variable de un real

Ahora examinaremos esta paradoja: al definir un concepto del infinito por la inocupación de un lugar, hemos admitido, no obstante, que en cierto sentido ese lugar ya está siempre marcado. ¿Cómo reconocerlo, por lo demás, si se disipa en la indistinción retrospectiva del infinito-soporte? Al tener que escribir que el lugar es inocupable, sin duda debo inscribir lo que atestiguará que es *ese* lugar y ningún otro. Diferenciar el lugar inocupable supone la ocupación constituida por la marca de la diferencia.

Y en rigor hemos aceptado escribir, sin pretender salirnos de lo que tolera la ley del campo, "para todo x, $x < y$". ¿Qué ocurre con "y" llamado variable y que está justamente en donde ninguna constante puede inscribirse y el símbolo suplementario sólo se inscribirá para forzar la refundición de todo el campo? Y si el infinito-punto no es más que lo que sustituye a una variable, ¿no hay entonces que atribuir a ésta el poder, por cierto que intracampal, de ocupar el lugar vacío, de modo que el verdadero concepto de lo infinito ya quedaría abarcado por la inscripción móvil de los x y los y?

Tal es lo que declaran varias epistemologías, la de Hegel entre ellas.

Las escrituras literales del álgebra, como $\frac{a}{b}$ son, respecto de un determinado campo cuantitativo, "signos generales" *(allgemeine Zeichen*[4]*)*. Entendámonos: infinitos de sustitución cuya finitud retiene —y concentra— la confusa virtualidad de inscripción de todos los quanta del campo mediante los cuales se puede remplazar *a* o *b* en el cálculo. En este caso las letras son "posibilidades indeter-

[4] Hegel, *Science de la Logique,* trad. S. Jankélévitch, t. I, p. 271. He modificado aquí y allá la traducción. En adelante designaré este libro con las siglas *CL.*

minadas de todo valor determinado"[5], con lo que la indeterminación de lo posible cuantitativo encuentra su cierre cualitativo fijo en la invariación formal de la marca: en el ejemplo de Hegel, la *relación* $\frac{a}{b}$, la barra—.

Lo que Hegel piensa en este texto es el concepto *lógico* de variable, pues rechaza, con toda razón, la noción de "magnitud variable" por considerarla vaga e impropia[6]. Efectivamente, la idea de variabilidad de una magnitud mezcla consideraciones funcionales (variaciones de una función) con consideraciones algebraicas (símbolos literarios o indeterminados), y oculta la *sustitución* por la *correlación*. Hegel se aplica más bien al concepto de lo que, aun cuando relacionado con la cantidad (con el número), no es un quantum. Las letras (*die Buchstaben*[7]) son variables según la diferencia propia que las asigna a los quanta; tal como en lógica se separan dos listas de símbolos de individuos, las variables participan de lo Infinito verdadero, relevo dialéctico de lo infinito de iteración[8].

Cierto es que en apariencia la variable es una encrucijada de infinitos. Acabamos de ver en qué sentido retiene anticipadamente los poderes del infinito-punto. Pero por lo mismo que se la puede remplazar por una constante y porque se consume soportando las sustituciones virtuales, parece marcar *todos* los lugares del campo considerado que son ocupables por constantes. De allí que la variable podría poner en índice alfabético al infinito-soporte. Y así es como lo entiende Quine en el aforismo "ser es ser el valor de una variable"[9], si el ser de que se trata es la materialidad de la marca, y el lugar ontológico es el espacio de su inscripción.

No hay, sin embargo, nada de eso. Inscripción efectiva, la variable presupone al infinito-soporte como sitio de los lugares. Ubicada allí donde puede sobrevenir una constante, pertenece al mismo orden de marcación que ésta y no

[5] *Idem, ibidem.*

[6] *CL*, I, 177.

[7] *CL*, I, 271.

[8] Tomo de J. Derrida la traducción de *Aufhebung* por relevo.

[9] W. V. Quine, "Notes on existence and necessity", *J. Phil*, 1943.

designa su tipo.

Sin duda, la variable marca un lugar *construible*, aunque no necesariamente ocupable, del campo. Pero esta marcación se anuda a la ley propia del campo, a su finitud algorítmica. Incluso si inscribo una variable en un lugar inocupable, no por ello infinitizo el campo, no trasgredo su regla, estándome permitido tan sólo el medio de *inscribir la imposibilidad de lo imposible.*

Sea por ejemplo, en el campo de los enteros naturales, la escritura:

$$4 - x = x$$

Es una escritura posible, a diferencia, por ejemplo, de $4 - 7 = 7$, que es, además de falsa, ilegible dentro del campo, pues el término $(4 - 7)$ está mal formado.

La posibilidad general (indeterminada) de escribir $4x = x$ y, digamos, $x > 4$ me permite *enunciar* la imposibilidad de su inscripción conjunta con la forma de la escritura:

$$\text{no } (4 - x = x \text{ y } x > 4),$$

escritura en la que *ninguna* constante puede mantenerse en el lugar marcado por la variable x, y que al mismo tiempo escribe esta imposibilidad. En este caso, la variable fundamenta la marca explícita de la inocupabilidad de un lugar construible.

Digamos que una variable garantiza una legibilidad de las escrituras imposibles lo suficiente para que se pueda leer la imposibilidad.

Ahora bien, de conformidad con una proposición de Lacan, para un determinado campo de pruebas lo imposible caracteriza a lo real. De acuerdo con la exclusión de ciertos enunciados –la imposibilidad de las constantes de ocupar ciertos lugares construibles– es como opera un sistema axiomático como *tal* sistema y soporta ser diferencialmente pensado como discurso de un real.

Que todo enunciado sea derivable, y el sistema se vuelve *inconsistente*; que todos los lugares construibles sean ocupables, y el sistema, al no marcar ya diferencias

ni regiones, se torna cuerpo opaco, gramática desquiciada, lengua espesa de la nada. La variable –inscripción que separa lo construible de lo ocupable, reglamentando para las constantes lo que no pertenece a lo segundo por ser de lo primero– revela ser el rastro intrasistemático de la realidad del sistema. Operador de lo real para un campo, autoriza en efecto en él la escritura de su propio imposible. Lo existente tiene por categoría el no-poder-ser el valor de una variable en el lugar que ésta marca.

Precisamente en esto la variable es lo inverso del infinito-punto, cuya inscripción prepara.

Pues al lugar de lo imposible, que la variable ocupa *para designar su imposibilidad,* viene a inscribirse el infinito-punto a título de constante. Ocupa de nuevo el lugar inocupable; sustituye a la variable, pero según la escritura de la *posibilidad de lo imposible.* En adelante, allí en donde la variable trazaba la carencia prescrita de toda constante se establece una constante. En infinito-puro es el devenir-constante de una variable en el lugar imposible cuya imposibilidad ordena.

La variable *realiza* la diferencia de un sistema en su condición de pura estela de la desaparición de una marca –de una constante–, de la que designa la carencia-en-su-lugar. El infinito-punto gracias al cual esa marca gira en el sistema, la *irrealiza*, cosa que ya sabían los matemáticos, quienes han designado sucesivamente irracional e imaginario los infinitos-puntos concernientes al campo de las relaciones de enteros y al que, dentro de la retrospección de su refundición, ha sido constituido como "real".

Situación, diría Lacan, alucinante del infinito-punto, cuya variable, lejos de abarcar el surgimiento, más bien ha marcado la exclusión prosaica.

De allí que el infinito-punto, por muy proliferante que pueda hacerse después de la refundición, sea axiomáticamente uno, o lista cerrada, no obstante que la variable es, si puede decirse, tan numerosa como las constantes: una cosa es escribir $x < y$ y otra es $x < x$, puesto que la imposibilidad debe ser evaluada para *cada* lugar, mientras que el infinito-punto relativo a un algoritmo se vincula a *un* lugar inocupable, y el infinito-soporte, originalmente, a *todo* lugar.

En un cálculo lógico la lista de las variables es abierta. Lejos de replegar en la unidad de una marca las diferencias del campo, la variable –instrumento de lo real de los lugares– no hace más que duplicarlas, distribuyendo tantas imposibilidades propias como constantes pueden entrar, o no entrar, en una relación cualquiera.

La variable como marca no puede representar a lo Infinito de las marcas del campo, siendo coextensiva a su realidad.

3. ¿Marcar lo casi-nada?

Nos ocuparemos de una clase particular de marcas, durante mucho tiempo consideradas, con posterioridad a algunos éxitos iniciales, como inadmisibles: las marcas infinitesimales. Imposible e infinito y variable y punto se distribuyen en la historia, ahora desembarazada, de una represión.

La absurdidad intrínseca de un número infinitamente pequeño fue, efectivamente, el resultado dogmático de un extensísimo recorrido, que puntualizan en sus comienzos especulativos las paradojas de Zenón.

No es exagerado decir que una secular tradición matemático-filosófica se anuda a él, una tradición cuya unidad resulta de un rechazo: el del elemento diferencial mínimo que había de inscribirse como tal en el tejido de la continuidad. La oposición misma entre los átomos indivisibles y la divisibilidad al infinito de lo continuo se establecen en el espacio unificado de esa exclusión, como que la indivisibilidad *real* del átomo le asigna una unidad de dimensión (muy pequeña) y no una puntualidad y puesto que la ininterrupción infinita de la divisibilidad prohibe, precisamente, concebir un infinitesimal punto de detención en acto.

De ahí que Hegel pueda validar conjuntamente el "principio atomístico" –incluso esa atomística matemática que aparentemente representan los *indivisibles* de Ca-

valieri y la divisibilidad al infinito del contenido: percibe con agudeza su correlación dialéctica, cuya signatura es la anulación de lo infinitamente pequeño como tal.

Tratándose de Cavalieri, Hegel muestra, por ejemplo, que, a través de un lenguaje inadecuado, a lo que apunta el matemático italiano no es a una *composición* del continuo espacial por elementos discretos, sino al principio de una *relación* de tamaño. Ningún primado de lo discreto es, pues, restaurado. Sin duda, "la representación de un *agregado* de líneas va contra la continuidad de la figura"[10]. Pero Cavalieri lo sabe perfectamente. No es conjuntista su concepción; los continuos no son colecciones de indivisibles: "Los continuos sólo siguen la proporción de los indivisibles"[11]. Comprendamos que la atomística de los indivisibles únicamente sirve para el cifrado comparativo de las figuras, dejando su ser-continuo fuera de todo alcance: "Las líneas no componen el contenido de la figura desde el punto de vista de su *continuidad*, sino tan sólo en la medida en que hay que determinarla como aritmética"[12]. En suma que la continuidad geométrica es el vacío donde los átomos indivisibles inscriben relaciones de tamaño. Y esta inscripción no emprende la divisibilidad *al infinito* del continuo, puro posible dejado en blanco por una relación de indivisibles que no denota su *ser* cuantitativo, sino su figuración en la estructura formal (cualitativa) de esa relación[13].

A su vez, la divisibilidad del continuo no libera ningún indivisible propio. Así como los indivisibles no pueden componer el continuo, la descomposición del continuo no puede apoyarse en un indivisible, ni siquiera en la realidad de una parte "infinitamente pequeña". La división del continuo se deshace apenas planteada la conexidad inseparable del todo: "La divisibilidad es sólo una posibilidad y

10 *CL*, I, 346.
11 *CL*, I, 347.
12 *CL*, I, 345.
13 A. Koyré retoma a este respecto, sin mencionarla, la demostración hegeliana. Véase "Bonaventura Cavalieri et la géométrie des continus", en *Etudes d'historie de la pensée scientifique* (1966). El artículo es de 1954.

no una existencia de partes; la multiplicidad en general sólo se plantea en la continuidad como un momento, rápidamente suprimido"[14].

Ni progresión ni regresión. En la epistemología clásica hay complicidad de lo atomístico con lo continuo.

Y es que, como Hegel lo destaca[15], el átomo nunca es un infinitesimal del continuo. El átomo es el Uno (aritmético) cuya proliferación *combinatoria* produce, no el continuo, sino la cosa sobre *fondo* de continuo. El verdadero principio incomponible del continuo y del movimiento sigue siendo el *vacío*, único espacio de inscripción de los Unos, infinito-soporte donde se marca la discreción atomística. Nada le cuesta a Hegel reconocer en la continuidad retroactiva del vacío la causa de la combinación móvil de los átomos, la continua inquietud de lo negativo que obliga a lo discreto a determinarse como numeral, o sea, como cosa tejida con átomos.

De ahí que la pareja átomos/vacío –objetivación física de la pareja discreto/continuo– se constituya excluyendo toda composición infinitesimal del continuo mismo: si *en* el vacío hay átomos, no hay átomos *del* vacío.

Simétricamente, la definición euclidiana de la magnitud de especie dada prohíbe toda detención del proceso de incremento-disminución, cuya posibilidad permanente *es* el concepto de magnitud: "Se dice que dos magnitudes (μεγέθη) están en relación (λόγος) cuando, multiplicadas, pueden sobrepasarse una a la otra"[16]. Hegel, intérprete exacto de las intenciones de la matemática griega, concluye de ello que un presunto *elemento* infinito que multiplicado o dividido nunca pueda igualarse a una magnitud finita cualquiera no guarda con ésta la menor relación: "Dado que lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño no pueden ser, uno, aumentado, y otro disminuido, ni el uno ni el otro son ya, en rigor, quanta"[17]. Esforzarse en pensar los infinitos como tales, o sea, en *marcarlos* a título de números, equivale a establecerse en

14 *CL*, I, 213.
15 *CL*, I, 171 y ss.
16 Euclides, Libro V, definición 4.
17 *CL*, I, 267.

el $\alpha\lambda o\gamma o\varsigma$ estricto, en la no-relación radical. Por lo tanto, sólo se inscribirá una marca de infinitesimal, como por ejemplo *dx*, en la composición de una relación *ya dada* y recordando "que, al margen de esta relación, él (el *dx*) es nulo *(null)*"[18]. Nulidad cuya fuerza es absoluta, pues excluye toda mención separada del *dx*. El *dx* no es nada, ni siquiera una escritura aceptable, fuera del lugar que le asigna el — . El *dx* como marca es *adherente* a un blanco determinado; la barra preexistente de la relación es lo único que posibilita su inscripción. Para Hegel, esta anterioridad de la barra es justamente la calidad de la diferencial y, por consiguiente, su infinitud.

Fácilmente se deduce que en el caso de la expresión "infinitamente pequeño", "pequeño" no significa nada, ya que fuera de la forma –cualitativa– de la relación no es posible evaluar la magnitud de lo que sólo es, *dx*, una marca nula. Lo mismo ocurre, observémoslo, en el Análisis contemporáneo: si la mención separada de la diferencial es la regla, no es precisamente porque sea un *quantum*, sino porque se la toma como *operador*: por consiguiente sería absurdo evaluar su magnitud.

Históricamente el proyecto matemático va, luego, a despojarse de toda mención del infinito cuantificado. Lagrange, principal fuente científica de Hegel, lo anuncia de modo expreso en el título mismo de su obra canónica: "Teoría de las funciones analíticas. Contiene los principios del cálculo diferencial exentos de toda consideración de infinitamente pequeños, evanescentes, límites y fluxiones y reducidos al análisis algebraico de las cantidades finitas".

El gesto de rechazo es constitutivo: la *impureza* del cálculo diferencial era la marcación aislada, el vestigio de lo infinitamente pequeño. La historia de este cálculo es, pues, también la de la borradura de ese vestigio.

Resulta notable que tales conclusiones hayan sobrevivido en lo esencial a la refundición cantoriana, acerca de la cual ya se sabe que trastornó por completo el concepto de infinitamente *grande*. El propio Cantor mostró ser, a raíz del rechazo de los infinitamente *pequeños*, de una

18 *CL*, I, 269.

intransigencia verdaderamente griega. Y Fraenkel, fiel eco del maestro, escribe aún en 1928: "Sometido a prueba lo infinitamente pequeño ha fracasado rotundamente. Los diversos infinitamente pequeños tomados en consideración hasta ahora y en parte cuidadosamente fundamentados han mostrado ser totalmente inutilizables para acabar con los problemas más simples y fundamentales del cálculo infinitesimal [...] y no hay razón para aguardar un cambio en este terreno. Sin duda es *concebible* (aunque pueda juzgárselo, con buenas razones, inverosímil y endilgárselo a un lejano porvenir) que un segundo Cantor proporcione algún día un fundamento aritmético irrefutable a nuevos números infinitamente pequeños que demuestren ser utilizables en matemáticas y quizá puedan abrirle un camino simple al cálculo infinitesimal. Pero en tanto nada de ello suceda [...] habrá que seguir sustentando la idea de que no es posible en modo alguno hablar de la existencia matemática –lógica por lo tanto– de los infinitamente pequeños en un sentido idéntico o análogo al que se da a los infinitamente grandes"[19].

La extraña violencia de este texto es, pese a las precauciones de uso, el síntoma de un afloramiento ideológico. La historia del análisis matemático se confunde en cierta parte con la historia, permanentemente contrariada, de la *represión* de los infinitesimales. En este punto Hegel sólo es, para retomar una expresión de Louis Althusser, el *explotador* filosófico de una coyuntura singularmente duradera[20].

A comienzos del siglo XVIII, en su ensayo *L'Analyste* [trad.] Berkeley había incoado el proceso sin apelación de los fundamentos del nuevo cálculo, ahincando en el eslabón más débil de la teoría: la extrapolación de las opera-

19 A. H. Fraenkel, "Einleitung in die Mengenlehre", en *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, p. 9.

20 En su Philosophie de l'algèbre (1962). J. Vuillemin todavía sanciona toda apelación a los indivisibles como una regresión intelectual: "... si por diferenciales se entienden magnitudes más pequeñas que nuestra magnitud asignable y a la vez, no obstante, diferentes de cero, entonces se vuelve a la época precrítica del Cálculo" (p. 523)

ciones, definidas para magnitudes finitas, a los pretendidos "infinitamente pequeños". Sabido es que Leibniz soslayaba este embarazoso problema con el recurso, tan dudoso como sólido, del postulado metafísico de la Armonía: "... sucede que las reglas de lo finito tienen éxito en lo infinito [...] y que, viceversa, las reglas de lo infinito tienen éxito en lo finito [...] y es que todo se gobierna con razón, y de otro modo no habría ciencia ni regla, lo que no estaría de acuerdo con la naturaleza del principio soberano"[21].

No es difícil imaginar que lo "sucede" ya no satisfacía a nadie en el siglo XVIII. Tanto más cuanto que, como observa Berkeley, el asunto era muy distinto respecto de los cálculos: los infinitesimales tenían, sin la menor duda, códigos operatorios particulares. No había violencia en "desatender" eventualmente los dx, ya en camino, y el marqués del Hospital formulaba con toda inocencia su *demanda* desde el comienzo mismo de su famoso tratado, que fue el primer manual de cálculo diferencial: "[Pedimos] que una cantidad que sólo es aumentada o disminuida con otra cantidad infinitamente menor que ella pueda ser considerada como siempre la misma"[22].

Ahora bien, ¿puede decirse que tales "negligencias" sean "reglas de lo finito"? ¿Y qué quiere decir esa marca, dx que tan pronto cuenta y tan pronto no? ¿Qué ocurre con una circunstancial autorización de borradura respecto de una inscripción, si por otra parte se la tiene por una constante separable?

Calcúlese por ejemplo, la "diferencia", como se decía entonces, del producto xy, conociendo la diferencia dx de x y dy de y, es decir, los infinitesimales "asociados" a cada una de estas magnitudes finitas. Desarrollo $(x + dx)(y + dy)$ y encuentro: $xy + ydx + xdy + dx\,dy$. Con relación a xy tengo, por lo tanto, una diferencia calculada, un "incremento" igual a $y\,dx + x\,dy + dx\,dy$. Para

21 Leibniz. *Mémorie de 1701 sur le calcul différentiel* [trad.], citada por A. Robinson en *Non-standard analysis*, Amsterdam, 1966.

22 De l'Hospital. *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.* Este libro reproduce, en lo esencial, las ideas de Bernoulli.

obtener la clásica fórmula $d(xy) = x\,dy + y\,dx$, se me pide que "desatienda" el producto $dx\,dy$ de los dos infinitesimales. ¿Pero por qué ahora y no desde el comienzo mismo del cálculo? Si efectivamente, como dice Hospital, $dx\,dy$ no es "nada" junto a $x\,dy$, ya que $\frac{dx}{x}\frac{dy}{dy} = \frac{dx}{x}$ y dx, infinitesimal propio de x, no es nada junto a él, con mucho mayor razón la suma $(x + dx)$ debe ser identificada, *desde el comienzo*, con x, de manera que el cálculo ya no tiene sentido. Para Berkeley, la prosecución de las operaciones *se rompe*, pues de camino cambio los principios mismos de la prosecución, utilizando la regla de negligencia sólo cuando me viene bien.

Son objeciones al parecer tan consistentes, que a decir verdad nunca se han visto rebatidas, y como es sabido el uso de los infinitesimales ha ido progresivamente declinando en beneficio de la noción "finitista" de *límite*.

Pero de un modo más esencial la naturaleza epistemológica del obstáculo queda en claro si se observa que la exclusión de los infinitamente pequeños recae *sobre un infinito-punto* relativo a la estructura de cuerpo ordenado de las "magnitudes". Esforzándose en pensar el infinito de la diferencial, Hegel y todos los matemáticos de su tiempo se desvelan por no puntualizarlo, y ésta es la puntualización que le repugna a la razón clásica.

En efecto, un *elemento* (un "punto") infinitesimal dx vendría a ocupar el lugar inocupable del número más pequeño que todos los demás, lugar marcado por una variable como sitio de lo imposible. *No hay* número real más pequeño o más grande que todos los demás. Esto es lo que plantea la teoría de las magnitudes continuas positivas.

Ahora bien, formularemos la siguiente *tesis epistemológica:* laa marcación de un infinito-punto es en la historia de las matemáticas la transformación en la que se anudan los *obstáculos* (ideológicos) más difíciles de reducir.

Hemos visto, por ejemplo, que los números irracionales y los números complejos eran históricamente presentados como marcación de un infinito-punto (raíces cuadradas "inexistentes"; ecuaciones "imposibles"). Sabido es con qué resistencias chocó la introducción de los primeros en tiempos de Platón –al final del *Teeteto* es una elaborada

discusión sobre el concepto de elemento mínimo— y de los segundos entre los algebristas italianos del siglo XVI y la puesta en orden de Cauchy.

Y de hecho, vinculada al forzamiento de los blancos propios de un campo, la introducción de un infinito-punto es un retoque de apariencia irracional, ya que en una determinada coyuntura teórica la racionalidad se define, precisamente, por el respeto de los blancos, que representan la única garantía, variablemente equilibrada, de diferencia *real* para el campo. Un matemático como Galois, cuyo propósito se vincula, justamente, a la teoría algebraica de los infinitos-puntos —teoría de las extensiones de un cuerpo base—, ha señalado con toda claridad que, de establecerse en el silencio constituyente lo no-dicho de una coyuntura campal, existe la posibilidad de producir su retoque decisivo: "A menudo parece que las mismas ideas se les presentan a varios a la vez como una revelación si se busca la causa de ello es fácil hallarla en las obras de quienes nos han precedido, en las que *tales ideas quedan prescritas sin que sus autores lo sepan*"[23].

Tanto en ciencia como en política, quien pone la revolución *en el orden del día* es lo inadvertido.

Pero en el caso de Galois el riesgo corrido fue pagado con el incomprensible olvido de los académicos. Y es que la refundición es una violencia teórica, una subversión.

La fórmula de Lacan según la cual lo que se excluye de lo simbólico reaparece en lo real se ve aquí interpretada de esta manera: en determinadas condiciones, lo excluido propio de una estructura matemática *ya producida* reaparece como marca instauradora del proceso real (histórico) de *producción* de una estructura diferente. Hemos hablado de la forma alucinante del infinito-punto —marca caduca que gira— porque queríamos pasar a donde una variable, bajo el efecto de una negación situada, sanciona lo real, el infinito-punto que un matemático declara haberles hecho gritar con frecuencia, para mejor, a la oscuridad, para peor, al demente. Y en primer término, caso de Galois; entre sus colegas, caso de Poisson.

Es concebible que una matemática que había *proce-*

23 E. Galois, *Ecrits et mémoires,* 1962. El subrayado es mío.

dido a la trabajosa expulsión de los infinitesimales haya velado luego, con el apoyo interesado de los filósofos, por la preservación de lo real que esa expulsión –bautizo de un Análisis-al-fin-rigurosamente-fundamentado– le hizo investir a comienzos del siglo XIX, bajo la pulcra y minuciosa dirección del barón de Cauchy.

Tanto más cuanto que los problemas planteados por Berkeley eran sumamente serios. En su forma general equivalían a esto: ¿Qué ocurre en nuestra definición del infinito-punto con la extensión a este término imposible de los algoritmos que determinen el lugar inocupable en que se halla? La sorpresa de la inventiva de los griegos y los algebristas italianos radicó en el hecho de mostrar que se puede *calcular* con los irracionales o con los imaginarios. Pero en fin de cuentas la refundición no lo conserva todo. Si se clausuran algebraicamente los números reales, sin duda se obtiene un sobrecuerpo (los números complejos) que es una infinitización puntual de ellos. Pero este sobrecuerpo ya no está ordenado: la estructura de orden no es válida para el campo refundido. Si se compactifica por adjunción de un "punto al infinito" la topología normal de esos mismos números reales, se pierde la estructura algebraica de cuerpo, etc. Con suma frecuencia la refundición por marcación de un infinito-punto, vinculada por definición a la posibilidad de extender *la estructura específica de la que es infinito*, nada garantiza en cuanto a los demás procedimientos definidos en el campo y que no intervienen en la construcción del lugar vacío donde llega la marca suplementaria.

Se sabe, por ejemplo, que el cuerpo de los números reales es *arquimédico:* dados dos números a y b positivos, con $a < b$, siempre existe un número *entero* n tal que $b < na$.

Con todo, esta propiedad esencial no podría sobrevivir a la introducción de un elemento dx infinitamente pequeño, definido como el infinito-punto del lugar "ser más pequeño que todos los demás". En efecto, para todo número real positivo *finito* ϵ, la infinita pequeñez de dx impone $dx < \epsilon$. Tendremos en particular, para *todo* número entero n, $dx < \frac{\epsilon}{n}$, pues $\frac{\epsilon}{n}$ es asimismo un número real *finito.* Y por consiguiente, cualesquiera que sean ϵ finito

positivo y n entero, tenemos, para dx infinitesimal $n\,dx < \epsilon$. No es dable aguardar sobrepasar un finito dado multiplicando el infinitesimal dx por un entero, no importa cuán grande sea: el campo de los reales refundido por la marcación de un infinitamente pequeño es *no-arquimédico.*

¿Es aislada esta pérdida? ¿No resulta natural pensar que la introducción explícita de infinitesimales provocaría tales daños en ese haz de estructuras que es el cuerpo de los números reales, que el Análisis se encontraría paralizado? Ya lo vemos: Lagrange después de d'Alembert y Hegel después de Berkeley son, en el rechazo de toda actualidad marcable para el dx, *según el obstáculo.* Una prudencia epistemológica viene en este punto a apuntalar la represión de un imperceptible puntual. Hasta estos últimos años el problema parecía despejado: la casi-nada y lo infinitamente pequeño carecen de marca propia. El infinitesimal *no es un número.*

4. Lo innumerable numerado

Pero el infinitesimal *es* un número: enunciado que subvierte el Análisis en la exclusión de la que había terminado por nacer y restaura, fundamentada, la inocencia de la inventiva de los pioneros del "nuevo cálculo".

Más de lejos, esta subversión desplaza el efecto ininterrumpido a través de varias épocas del concepto, de las aporías de Zenón sobre continuidad y divisibilidad; redispone el campo de racionalidad que gobernaban tales aporías conforme al imperativo, con frecuencia mudo, de tener que no exponerse en él.

Desde hace unos diez años los trabajos de Abraham Robinson[24] han establecido que se puede reconstruir

[24] Véase el libro fundamental, que nos sirve de constante referencia: A. Robinson, *Non-standard analysis,* Amsterdam, 1966. El descubrimiento de Robinson se remonta al otoño de 1960. Las primeras publicaciones son de 1961. Pero la idea básica figuraba de manera implícita en los trabajos de Skolem sobre los modelos no-estándards de la aritmética, trabajos que se remontan a 1930-35. En adelante traduciremos *standard* por "conforme".

íntegramente el análisis clásico "sumergiendo" el cuerpo de los reales en un cuerpo no-arquimédico mediante la marcación inaugural de un infinito-punto –un número infinitamente grande– y el correlativo libre uso de elementos infinitesimales.

Aparte que por fin transfiere la secular represión de estos conceptos, el descubrimiento de Robinson administra una prueba convincente de las capacidades productivas del pensamiento formal. Es, en efecto, una amplia clase de infinitos-puntos, y Robinson garantiza su marcación coherente con el exclusivo recurso de la teoría de los sistemas formales.

Reflexiónese en la forma general del problema que legaba la historia en la modalidad del rechazo: no existe número más grande que *todos* los demás. Esto quiere decir: no hay número mayor que los términos de toda serie *infinita* estrictamente creciente. En cambio, dado un conjunto *finito* de números, está bien claro que siempre se puede encontrar un número superior a todos los de ese conjunto. Tal es, incluso, el principio de la *indefinitud* del campo - numérico, a su vez apuntalada por el infinito-soporte: toda serie finita puede ser superada. La relación de orden trasgrede lo finito.

Formalmente, la indefinitud para una relación (en este caso el orden) puede expresarse así: sea un sistema formal S que contenga un conjunto infinito de constantes, notadas a_i (en nuestro ejemplo las marcas de los números), y una relación binaria $R(x, y)$ en la que las variables x e y denoten la realidad de los lugares distribuidos por R a las constantes (en nuestro ejemplo, $R(x, y)$ es $x < y$). Supongamos que para todo conjunto finito de constantes $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ sea *coherente*, con los axiomas del sistema formal S, afirmar que existe una constante b que sostiene con $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la relación R.

En otros términos, supongamos que para *todos* los conjuntos *finitos* de constantes el enunciado:

$$(\exists y)\ [R(a_1, y) \ .\ \mathrm{y}\ .\ R(a_2, y)\ .\ \mathrm{y} \ldots \mathrm{y}\ .\ R(a_n\ y)]$$

sea coherente con el sistema S.

Luego, la relación R estructura una indefinitud con las

constantes: toda serie finita $a_1, a_2, \ldots, a_n$ admite la marcación de un "punto-de-serie" conforme a R (un mayorante en el caso en que R es la relación de orden). Para subrayar que la indefinitud se aplica a esa marcación diremos que una relación que obedece a esta condición es trasgresiva-en-lo-finito, o, con mayor sencillez, *trasgresiva*[25].

Sean ahora $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ las relaciones trasgresivas que admite nuestro sistema S (para simplificar, suponemos enumerable este conjunto). Asociemos a cada una de tales relaciones una *marca suplementaria*, que no figura entre las constantes a_i del sistema en su forma inicial. Escribamos p_n la marca asociada a R_n. Y *adjuntemos* como axiomas nuevos *todos* los enunciados de la forma R_n (a_i, p_n), o sea, todos los enunciados que afirman que p_n sostiene con una constante a_i la relación R_n. R_n recorre todas las relaciones transgresivas, no obstante que a_i adquiere sucesivamente todos los valores posibles entre las constantes del sistema S.

En el caso de la relación de orden sobre los números enteros naturales, esto equivale a asociar a $<$ (que es, evidentemente, trasgresiva-en-lo-finito) una marca suplementaria i, que no es nombre de número, y a formular como axiomas *todos* los enunciados $n < i$, donde n es una constante númerica. Reconocemos en i un *infinito-punto* para la estructura de orden de los enteros naturales.

De una manera general, el nuevo sistema obtenido por el anterior procedimiento es la *teoría formal de los infinitos-puntos para las relaciones trasgresivas-en-lo-finito de un sistema dado.*

Se trata –observación fundamental– de una simple *extensión* de S: no hemos hecho más que *añadir* una constante y unos enunciados. Todos los axiomas y las reglas del sistema inicial permanecen inalterables, con lo que todos los teoremas de este sistema son, *también*, teoremas de las teoría de los infinitos-puntos. En particular, los teoremas universalmente cuantificados siguen

25 Robinson emplea en el texto inglés, para caracterizar estas relaciones, el adjetivo *concurrent*.

siendo válidos y se extienden, por lo tanto, al "caso" de la constante suplementaria (véase el apéndice de este texto).

Así es como en el sistema formal de los números enteros la aserción universal que asigna a *todo* número n un sucesor $n + 1$ sigue siendo verdadera, de manera que a la constante suplementaria i se encuentra asignado un sucesor $i + 1$. De un modo más general, si tenemos un teorema del sistema inicial de la forma "todo x tiene la propiedad P", las reglas lógicas elementales permiten demostrar $P(a_i)$ para toda constante. Tendremos, pues, en particular: "ρ_n tiene la propiedad P". Nos hallamos en condiciones de retomar los algoritmos que fundamentan el infinito-punto. La *estructura* del campo inicial se ve en ciertos aspectos conservada en el campo refundido. Por lo tanto, llamaremos *extensión trasgresiva*[26] del sistema inicial al nuevo sistema.

El problema clave radica evidentemente en saber si la extensión trasgresiva es un sistema *coherente*; en otros términos, si tenemos lógicamente el derecho de introducir los axiomas suplementarios requeridos. ¿No viene la adjunción de *todos* los enunciados $R_n(a_i, P_n)$ a contradecir el hecho de que las relaciones R_n sólo son trasgresivas en lo finito? Pues por ejemplo en S es *falso* que un número pueda ser mayor que los otros. ¿No excede la trasgresión *infinita* los poderes lógicos del lenguaje formal adoptado?

La lógica pura proporciona la respuesta en forma de un teorema muy general, un teorema que sostiene toda la construcción:

Si un sistema es coherente, su extensión trasgresiva también lo es[27].

26 Robinson emplea *enlargement*.

27 Este teorema depende de otro, fundamental en teoría de los sistemas formales, cual es el teorema de compacidad. Este garantiza el hecho de que un sistema cuyo número de axiomas es definido es coherente si todos sus subsistemas finitos (cuyo número de axiomas es finito) lo son. Ahora bien, que una relación R de un sistema S sea trasgresiva-en-lo-finito significa de manera esencial que la teoría obtenida por adjunción de un conjunto *finito* de enunciados $R(a_i, \rho)$ es coherente con S. Efectivamente,

Por consiguiente, estamos autorizados a marcar un infinito-punto para toda relación trasgresiva-en-lo-finito. Esta marcación conserva la coherencia formal y define una extensión "no-conforme" de la estructura que es el modelo "conforme" (ordinario) del sistema.

Y todo se simplifica. Dada como sistema de base la teoría usual de los números reales, sea R su campo (los "objetos" marcados por las constantes). La relación de orden es, evidentemente, trasgresiva. Sea α el infinito-punto en esta relación: α es "mayor" que todo elemento de R: es *infinitamente grande.*

Como los enunciados universales de la teoría inicial valen asimismo para ("regreso" de los algoritmos al infinito-punto), y como para *todo* par de números en R la suma y el producto existen, se podrá definir, por ejemplo, $\alpha + 1$, $\alpha + \alpha$, o α^n, etc., que son, *todos*, infinitamente grandes (más grandes que toda constante de R).

Destaquemos, por lo demás, que el infinito-punto α –instrumento *escritural* de la refundición– no conserva en el campo refundido ningún privilegio particular. Buen ejemplo de *borradura de la causa* en el dispositivo de una estructura. Y especialmente de ningún modo es α aun cuando formalmente *inscrito* como única constante de trasgresión, el más pequeño número infinito, como tampoco es, según acabamos de verlo, el más grande. Así como el número $\alpha - r$, donde r es un número positivo cualquiera del *campo inicial*, es evidentemente más pequeño que α. No por ello deja de ser un número infinito. En efecto, si no lo es, se debe a que es más pequeño que un número finito, o sea, t. Pero $\alpha - r < t$ implica $\alpha < t + r$, lo que es absurdo, pues α es infinito y $t + r$ –suma de dos números finitos– es finito. En realidad hay un número indefinido de números infinitos más pequeños (o más grandes) que α: la refundición distribuye los infinitamente grandes en un espacio abierto, tanto hacia lo "bajo" como hacia lo "alto". En ese espacio es donde la marca α no

siempre existe, por definición, un elemento que sostiene con todos los a_i (en número finito) la relación R. El teorema de compacidad garantiza, pues, la coherencia de la extensión trasgresiva obtenida por adjunción de la infinitud de los enunciados $R_n(a_i,ppn)$.

denota ninguna posición asignable, particular: su operación la disipa.

No obstante, está claro que toda *escritura* cabal de un número infinito, todo trazado *efectivamente* construido para designarlo a partir del material gráfico de la extensión, contiene por lo menos una mención de α: toda escritura que no combina *más que* constantes del sistema inicial derrota un número del campo inicial, un número finito. La *causalidad* de la marca α es en este caso, dentro de la borradura campal de lo que designa, la omnipresencia marcada para toda ocupación de un lugar al que sólo pueden llegar los "nuevos" números infinitos. La marcación de un infinito-punto es una operación del *significante* como tal.

De un modo parecido, lo infinitamente pequeño se introduce mediante combinación escritural a partir de α. Se puede en efecto definir $\frac{1}{\alpha}$ ya que R es un cuerpo y el enunciado "todo elemento posee un universo" es, por lo tanto, un axioma para R. El teorema de coherencia de la extensión nos garantiza la existencia de ese inverso para el elemento infinitamente grande α. Ahora bien, el inverso es *infinitesimal* (infinitamente pequeño con respecto a las constantes de R).

En efecto, sea a un número real positivo *finito* tan pequeño como se quiera (una constante del sistema inicial). *Siempre* tenemos $a < \alpha$, puesto que α es infinitamente grande. Dividiendo los dos miembros de la desigualdad por el producto $a\,\alpha$ –que es un número infinitamente grande–, se obtiene: $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{a}$ para todo a finito positivo; por lo tanto $\frac{1}{\alpha} < a$. Consiguientemente, que a finito positivo *fuere* tan pequeño como se quisiera, $\frac{1}{\alpha}$ es más pequeño que a.

A su vez, el infinitesimal $\frac{1}{\alpha}$, o α^{-1}, da por extensión de los algoritmos una familia infinita de infinitesimales. De modo particular, si β es infinitesimal, por grande que sea el número entero n finito, $n\beta$ sigue siendo infinitesimal. En efecto para *todo* a finito, tenemos $\beta < a$ (puesto que β es infinitesimal y a es finito), y por consiguiente $\beta < \frac{a}{n}$ ($\frac{a}{n}$ permaneciendo finito); por lo tanto $n\beta < a$.

Así se verifica que el campo de la extensión es no-arquimédico.

Finalmente, sea R [α] el sobrecampo refundición de R conforme a la marcación de un infinito-punto para la relación de orden. Contiene, además de un cuerpo isomorfo a los reales (R, denotado por las constantes del sistema inicial), una infinidad de elementos infinitamente grandes y de elementos infinitamente pequeños.

Con mayor precisión, llamemos números *conformes* a las marcas de R [α] que pertenecen a R, que son constantes "anteriores a la refundición". Entre los números positivos de R [α] distinguiremos:

–Los *números finitos:* números comprendidos entre dos números conformes positivos no-nulos. Naturalmente, todo número conforme es finito. Pero hay otros de ellos; por ejemplo, la suma de un número conforme y de un infinitesimal es un número finito no-conforme.

–Los *números infinitos:* números mayores que todo número conforme.

–Los *números infinitesimales:* números más pequeños que todo número conforme (por convención consideraremos a cero como un infinitesimal).

Dentro de este marco se define con toda sencillez lo que seguía siendo una idea vaga en el período heroico del cálculo diferencial: la proximidad infinita. Un número a está infinitamente cerca de un número b si la diferencia $a - b$ es un número infinitesimal.

A partir de lo cual Robinson reconstruye todos los conceptos fundamentales del Análisis en un lenguaje que, aunque a menudo recuerda al del marqués del Hospital, no deja de ser ciertamente sistemático.

Observemos ante todo que en R [α] existen *números enteros infinitos:* en efecto, la extensión trasgresiva de R es *también* una extensión de N, conjunto de los enteros naturales, que es un subconjunto de R. Sea ahora una serie $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n, \ldots$ de números conformes. Se dirá que el número conforme l es *límite* de la serie s_n si para todo número entero *infinitamente grande* n, $l - s$ es *infinitamente pequeño.* El verbo "ser" puede remplazar al clásico "tender-hacia", puesto que ser infinitamente grande (o pequeño) quiere decir ser un *número* infinito (o

infinitesimal). El concepto de convergencia ya no se construye según asignaciones de desaparición o según propiedades tendenciales, sino recurriendo a *elementos* de subconjuntos definidos de R [α].

De este modo se encuentra subvertida, por puntualización de su definición, la objeción principal de Hegel –y de Lagrange– contra la idea de límite, al mismo tiempo que ésta pierde su función fundamentadora. Se sabe en efecto, que con posterioridad a la decadencia de los infinitamente pequeños, signada por una primera clarificación de d'Alembert, Cauchy, Bolzano y Weierstrass debieron asentar definitivamente el cálculo diferencial sobre el concepto de límite, procedimiento que tenía en opinión de ellos el inestimable mérito –sanción racionalizante de la represión– de no hacer aparecer en los textos *más que marcas finitas.* Cuando digo: "La serie s_n tiene por límite el número l si, cualquiera que sea el número positivo ϵ, existe un número entero M tal que $n > M$ implique $|l - s_n| < \epsilon$", las únicas constantes numéricas mencionadas –ϵ, n y M– son íntegramente finitas. El concepto de límite efectúa, por lo tanto, de manera eficaz el rechazo de toda marca de infinitesimal, y precisamente por ello d'Alembert saluda su positividad en la *Enciclopedia:* "No se trata, como corrientemente suele decírselo aún, de cantidades infinitamente pequeñas en el cálculo *diferencial*; únicamente se trata de límites de cantidades finitas. Así, la metafísica de lo infinito y de las cantidades infinitamente pequeñas, más grandes o más pequeñas unas que otras, es totalmente inútil para el cálculo *diferencial.* Nos valemos del término *infinitamente pequeño* sólo para abreviar las expresiones"[28].

Simétricamente, esa positividad es para Hegel, ya que también él la reconoce, falta al infinito (verdadero). La idea subyacente de que el dx marca una proximidad, que x "tiende hacia" un valor x_0, no tiene para él el menor sentido especulativo: "La aproximación es una categoría que ni dice ni entrega nada concebible; dx ya tiene su aproximación detrás de él. No está próximo ni más próximo, y lo infinitamente próximo equivale a la negación de

[28] Artículo "Différentiel" de la *Encyclopédie.*

la proximidad y de la aproximación"[29].

En el análisis no-conforme, esta negación es dada vuelta en *existencia* númerica de un infinitesimal, que marca la diferencia infinitamente pequeña. En cuanto al positivo ardid del trastrueque, es inútil: la proximidad infinita es, en efecto, *cifrable*. Partidarios y adversarios del concepto de límite quedan por igual absueltos, como que el común terreno de su oposición se define por el rechazo de ese cifrado.

En el mismo estilo, la continuidad de una función al punto real (conforme) x_0 origina enunciados como: $f(x)$ es continua al punto $x_0, a < x < b$, si y solamente si, para todo x infinitamente próximo a x_0 (o sea, $x - x_0$ infinitesimal), $f(x)$ es infinitamente próxima a $f(x_0)$, lo que quiere decir: $f(x) - f(x_0)$ infinitesimal.

Para definir la integral de Cauchy se dividirá el intervalo $[a, b]$ en grupos *infinitamente numerosos* (la serie x_n de tales grupos se ordenará por los números enteros de $R[\alpha]$, que contiene enteros infinitos, de manera que "infinitamente numerosos" posee una significación numeral estricta); se requerirá que cada grupo sea *infinitamente pequeño* (en otros términos, $x_{n+1} - x_n$ será un número infinitesimal), etc.

El Análisis revela ser *el lugar de las infinidades numerables.*

Retrospectivamente, la evidencia hegeliana y clásica atinente a los quanta infinitesimales queda, por lo tanto, íntegramente deshecha.

Y no cabe duda de que Hegel y Berkeley sólo efectuaban la epistemología instantánea de las matemáticas de su tiempo. No *contradijeron* a éstas. Pero si Berkeley estableció la fundamental oscuridad del Análisis sólo para salvar por comparación el derecho de la religión respecto del misterio, Hegel por su parte validó el rechazo del infinito-punto sólo para volar en auxilio de las matemáticas en busca de fundamento y hacerles el ponzoñoso regalo de la relación "cualitativa". La degradación de la multiplicidad y la negativa a pensar los conceptos del Análisis dentro de

29 *CL*, I, 299.

una lógica de las marcas, por muy ahítos que puedan estar de una confusa actualidad científica, no dejan de verse *esclavizados* por los objetivos de la especulación. Solamente éstos requieren la supremacía de la cualidad y el descrédito relativo del pensamiento por algoritmos, del pensamiento *inscrito:* del pensamiento estructural.

Que este efecto retroactivo sea a su vez preparado en toda la historia de la filosofía por una secreta y permanente supremacía de lo continuo sobre lo discreto, es cosa que Hegel declara sin ambages: "La variación de las magnitudes variables está determinada cualitativamente y es, por consiguiente, continua"[30]. Cualidad y continuidad se implican, implicación que ha pesado sobre la historia misma de los conceptos teóricos del Cálculo Diferencial y que en cierto sentido ha gobernado la censura de los infinitesimales.

Cualidad, continuidad, temporalidad y negación: categorías serviles de los objetivos de una ideología.

Número, discreción, espacio y afirmación; o, mejor, Marca, Puntuación, Blanco y Causa: categorías de los procesos científicos.

Así se señalan formalmente las dos "tendencias" en lucha, según Lenin, desde los comienzos de la filosofía. En lucha *en* los discursos mismos y formativa de las elecciones históricas de la ciencia. Lucha entre la materialidad del significante y la idealidad del Todo.

Los vestigios infinitesimales fueron en matemática las víctimas de esa lucha, no porque contravinieran alguna intemporalidad formal, sino porque una enredada historia sostenía a la Razón de una época en su propósito de excluirlos y de no encadenar a ellos el Infinito.

Que en el acto y el efecto de lo infinito se trate de disgresiones y suplementos escriturales, tal es, en efecto, lo que se prefería no oír, conforme lo demostró Cantor dos siglos después de los fundadores del "nuevo cálculo"[31].

30 *CL,* I, 299.

31 Y como aún hoy lo atestigua el increíble y grotesco éxito de opinión obtenido por el libro, ampliamente difundido, *Cantor a tort,* de G. A. Métrios: risible síntoma de la obstinación reacciona-

El regreso imprevisto, en medio de un renovado estupor, de los infinitesimales[32], si bien se produce demasiado tarde para el Análisis –que ya no anda, desde luego, en busca de sus fundamentos o de sus cimientos–, tiene el inestimable valor de *desintricar* de acuerdo con una ciencia lo que, dentro de la orquestada aceptación de su rechazo, incumbía no tanto a las necesidades del concepto como a las ilusiones compulsivas, cuya salvación era importante asegurar de manera ideal.

ria en que se perpetúan las ideologías paramatemáticas de lo Infinito.

32 Véase la desgarrante revisión que con tanta honestidad acepta Fraenkel en *Abstract set theory* (3a. ed., 1966), p. 125, exactamente después de un pasaje consagrado a la esterilidad de lo infinitamente pequeño: "Recientemente, un inesperado uso de las magnitudes infinitamente pequeñas y, de modo particular, un método para basar el análisis (el cálculo) sobre infinitesimales han sido posibilitados gracias a una extensión propia no-arquimédica y no-estándard del cuerpo de los números reales. Para este sorprendente desarrollo, el lector...", etcétera.



APENDICE

Acaso causará asombro que afirmemos la "conservación" de los axiomas de un sistema formal para su extensión trasgresiva, cuando, por ejemplo, $R\ [\alpha]$ es no-arquimédico siendo R arquimédico. Pero precisamente se trata de un buen ejemplo del carácter *formal* del procedimiento

En el sistema inicial el arquimedismo se expresa por un *enunciado* de este tipo: "Para dos números a y b tales que $a < b$ siempre existe un entero n tal que $b < na$".

Formalicemos este enunciado:

$$(\forall x)\ (\forall y)\ [x < y \rightarrow (\quad n) / \ y < nx]]$$

Decimos: este enunciado formalizado *es un teorema de* **R** [α]. Pero, por supuesto, la variable cuantificada "*n*" adquiere sus valores *en los enteros de* R [α], que contiene, como se sabe, enteros *infinitos.*

R [α] no es arquimédico, en el sentido en que para un infinitesimal no existe *n finito* tal que el infinitesimal multiplicado por *n* pueda sobrepasar un determinado número finito.

Pero el *enunciado formal* del arquimedismo sigue siendo válido, puesto que, al multiplicar un infinitesimal por un número entero *infinito* conveniente, se puede, en efecto, sobrepasar todo número finito dado.